-1) Introduzione

- **Ripasso su Insiemi numerici, numeri reali e misura di lunghezza**.

Come vedremo, la Fisica partendo dall'osservazione e dall'esperimento cerca di determinare le leggi della Natura. I ragionamenti alla base di queste leggi si esprimono matematicamente in modo che non ci siano arbitrarietà, siano oggettive, portino a dei risultati definiti e che possano essere confrontati.
Infatti i fenomeni possono essere riprodotti da persone differenti e quindi la comparazione di quanto avviene non può essere lasciata al caso, con descrizioni qualitative e poco definite.

Questo a maggior ragione quando si vuole utilizzare le conoscenze fisiche per applicazioni, come vien fatto dall'Ingegneria: esprimerle in numeri è fondamentale.

Iniziamo perciò questo ripasso sulle conoscenze pregresse partendo dai numeri.
Esistono vari insiemi di numeri introdotti anche storicamente per risolvere i problemi che l'Uomo doveva affrontare:

a) insieme dei **numeri naturali** $\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots , n, n+1, ..\}$ o interi positivi: sono i numeri necessari a contare oggetti, risolvono il problema di sapere quanti oggetti ci sono o posseggo; sono anche i primi numeri che vengono insegnati ai bambini. Lo zero non fu subito riconosciuto come numero perché contare l'assenza di oggetti non aveva senso.
   Le quattro operazioni tra numeri naturali non sempre hanno risultato nei naturali:
   -somma: si può sempre eseguire
   -moltiplicazione: essendo una somma ripetuta si può sempre fare
   -**sottrazione**: si può eseguire se il minuendo m è maggiore o uguale al sottraendo s e quindi $m - s$ ha risultato tra i numeri naturali
   -**divisione**: si può eseguire se il dividendo D è multiplo del divisore d altrimenti il risultato non è esatto e fornisce un resto.

b) Quando si iniziò a dover tener conto di debiti o crediti sorse la necessità dei numeri che indicassero questa condizione e quindi i numeri interi con segno iniziarono ad essere utilizzati, ovvero i **numeri relativi** $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots, +n, +(n+1), ..\}$. Hanno le stesse proprietà dei numeri naturali ma **permettono di eseguire sempre l'operazione di sottrazione**. I numeri naturali coincidono con i relativi positivi e quindi i relativi positivi vengono solitamente scritti senza segno +: +2 $\rightarrow$ 2.

c) Per eseguire sempre l'operazione di divisione furono introdotte le **frazioni** ovvero i **numeri razionali** $\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} con\ n \in \mathbb{Z}\ e\ m \in \mathbb{N}\ e\ m \neq 0\right\}$. Solo la divisione per zero non è possibile. I numeri relativi corrispondono alle frazioni apparenti $\frac{m}{n}$ in cui il numeratore m è multiplo del denominatore n come in $-\frac{15}{5}$ o in $\frac{24}{6}$ che si semplificano in $-\frac{3}{1}$ e $\frac{4}{1}$ la cui scrittura viene ulteriormente semplificata utilizzando i numeri relativi -3 e 4.

   Da notare che l'idea della frazione $\frac{m}{n}$, ovvero dividere l'unità in n parti uguali e prenderne m e più antica dell'idea del numero relativo.

   - In questo quadro, ogni insieme numerico successivo allarga le possibilità di calcolo di quelli precedenti: in particolare l'insieme precedente ha un sottoinsieme corrispondente nell'insieme successivo che conserva i risultati delle operazioni. Ad esempio nei relativi le operazioni tra i relativi positivi forniscono valori che sono uguali a quello che si ottengono utilizzando i naturali).

- **I razionali permettono di eseguire sempre le quattro operazioni** (a parte dividere per zero).

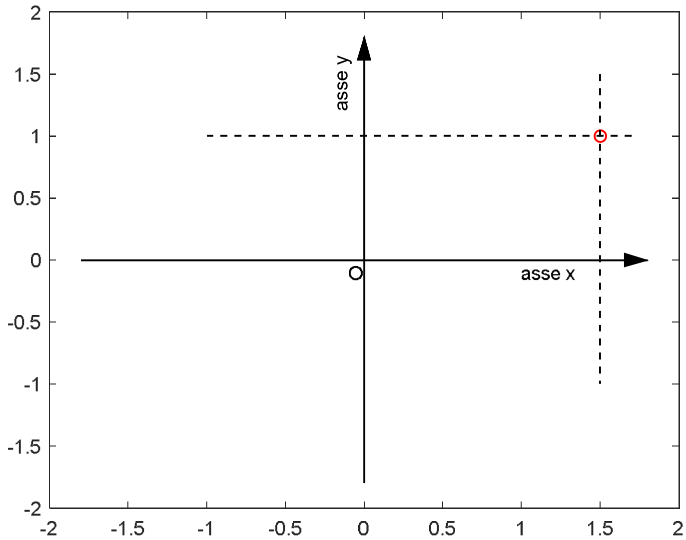
d) D'altra parte introducendo concetti come l'area del quadrato e il teorema di Pitagora, per risolvere equazioni nasce la necessità di operare con la radice quadrata e, in generale, con radici di ordine superiore. Preso il quadrato di lato di unitario, $l = 1$, in opportune unità ed applicando il teorema di Pitagora, la **misura** della diagonale vale $\sqrt{1^2 + 1^2}$. Tale numero non è rappresentabile da una frazione, $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale.

L'estensione dei numeri razionali unendo a questi l'insieme degli irrazionali $\mathfrak{I}$ porta all'insieme dei **numeri reali** $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathfrak{I}$.

Da notare che gli **irrazionali** non potendosi esprimere con frazioni **danno in genere luogo a numeri decimali non periodici che sono infiniti** e quindi non possiamo rappresentarli esattamente: per esempio $\sqrt{2} = 1.414213562373095 \ldots \ldots$ e quando scriviamo $\sqrt{2}$ =1.414 in realtà è un'approssimazione infatti $1.414 = \frac{1414}{1000}$ è un numero frazionario decimale. L'approssimazione però può essere migliorata considerando più cifre: qualunque numero irrazionale può essere approssimato sempre meglio considerando una **frazione decimale** (numero decimale) con sempre più cifre **che tende al numero irrazionale**.

L'insieme dei **numeri reali** è in genere l'insieme che viene studiato nelle superiori. È anche l'insieme che **si può mettere in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta**.

In particolare la **retta deve essere orientata** (sappiamo la direzione positiva in cui andare, la retta diventa un **asse** e convenzionalmente si può indicare con una freccia sulla retta o lo si capisce dall'ordinamento crescente dei numeri associati), viene definita un'unità e quindi ogni punto dell'asse è in corrispondenza con un numero reale.
Questo permette di interpretare geometricamente problemi algebrici o viceversa (geometria analitica).

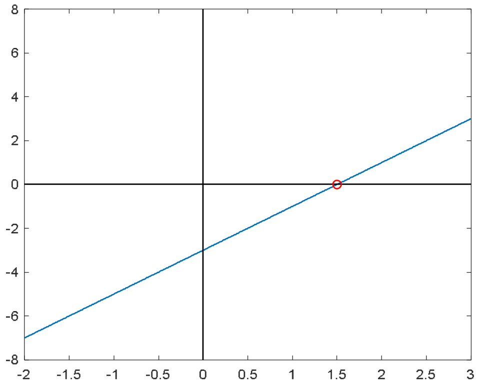


Nel caso piano (2 dimensioni) occorre introdurre un sistema di 2 assi ortogonali (perpendicolari) e lavorare nel piano cartesiano xy: l'asse orizzontale delle ascisse, asse x, si incontra con l'asse delle ordinate, asse y, nel punto **O origine degli assi**.

Ogni punto del piano è adesso individuabile da una coppia ordinata (ovvero sappiamo che prima è il valore x e poi quello y) **di valori reali** (x, y) che sono le coordinate cartesiano del punto: esse si trovano eseguendo la proiezione (ortogonale o perpendicolare) sugli assi x e y, l'intersezione delle perpendicolari (linee tratteggiate) rispettivamente con asse x e asse y fornisce due punti associati ai valori numerici reali x e y.

Viceversa, **data la coppia ordinata possiamo trovare il punto**.

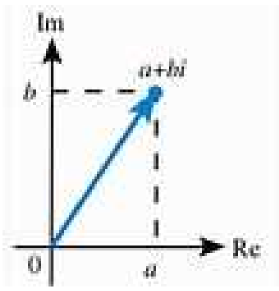
In tale insieme la soluzione di equazioni di primo grado (geometricamente l'intersezione di una retta rappresentata dal polinomio di primo grado $y = ax + b$ e l'asse x (di equazione y=0) cioè equazione $ax + b = 0$) è sempre fattibile: $ax = -b \rightarrow x = -\frac{b}{a}$ (ovviamente $a \neq 0$).



D'altra parte la regola dei segni per la moltiplicazione ($+\cdot+=+;+\cdot-=-$; etc.) comporta che la radice quadrata non possa essere effettuata su numeri reali negativi: quanto vale $\sqrt{-4}$ =?

e) La necessità di poter sempre eseguire le operazioni se si vogliono risolvere problemi ha portato ad una estensione dei numeri reali che è l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$.
I numeri complessi hanno due parti (un po' come le frazioni hanno numeratore e denominatore): la parte reale a e la parte immaginaria b e solitamente vengono scritti come $z = a + ib$ con l'unità immaginaria definita $i = \sqrt{-1}$, ovvero è la soluzione di un'operazione impossibile sull'unità tra i reali.
Questa unità immaginaria ha le proprietà che $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 i = -i$, $i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$.
A volte, soprattutto in ambito elettrotecnico/elettronico, l'unità immaginaria viene anche indicata con j.

È possibile pensare le due parti del numero complesso come le componenti nel piano (piano complesso o piano di Argand-Gauss) come mostrato in figura.
L'ascissa rappresenta la parte reale del numero $Re(z) = a$ mentre le ordinate la parte immaginaria $Im(z) = b$.



Si definisce **coniugato di un numero complesso** il numero complesso che ha la stessa parte reale ma quella immaginaria è opposta (in genere si indica con una barra sopra il simbolo o con un asterisco: $z = a + ib$ e $\bar{z} = z^* = a - ib$).

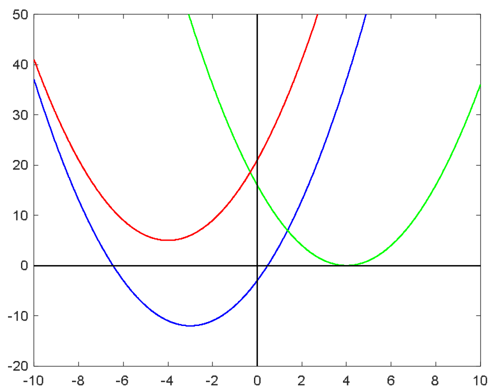
Da notare che questa estensione permette di esprimere la soluzione di una equazione di ordine qualunque.
Probabilmente nelle superiori sono state introdotte le **equazioni di secondo grado**, legate geometricamente all'intersezione di una parabola (rappresentata da un polinomio di secondo grado $y = Ax^2 + Bx + C$) con l'asse delle ascisse x (con equazione $y = 0$ ovvero $Ax^2 + Bx + C = 0$).
Essendo l'equazione di grado 2 le soluzioni sono due e date dalla **formula risolutiva**

$$x_- = \frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

oppure

$$x_+ = \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

in cui cambia il segno davanti alla radice.



Detto $\Delta = B^2 - 4AC$ il **discriminante** si hanno 2 radici reali distinte se $\Delta > 0$ (curva blu), due radici coincidenti se $\Delta = 0$ (curva verde), 2 radici complesse e coniugate se $\Delta < 0$ (curva rossa, la parabola non interseca l'asse x).

Le parabole rappresentate hanno tutte concavità verso l'alto perché si è scelto $A > 0$.

Il nostro uso dei numeri complessi sarà limitato a pochi casi, mentre verrà utilizzata più spesso **la risoluzione di equazioni di secondo grado**.

I numeri complessi semplificano la soluzione di vari problemi ad esempio di elettrotecnica ed elettronica e sono l'insieme numerico utilizzato in Fisica moderna (quantistica).
Inoltre essi sono alla base di tecniche di compressione di file come nel formato mp3.

Sistemi di equazioni

I problemi da risolvere possono portare a più equazioni da risolvere contemporaneamente, i sistemi di equazioni di cui si farà uso nel corso.
Nelle superiori è possibile che siano stati introdotti i sistemi lineari (equazioni di primo grado) come ad esempio
$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ dal punto di vista geometrico ogni equazione rappresenta una retta del piano e il sistema significa trovare (se esiste) il punto di intersezione tra le due rette[1].
Un modo di risolverlo è tramite il **metodo di sostituzione**: nella prima equazione $x = \frac{c-by}{a}$ e sostituita nella seconda $d\frac{c-by}{a} + ey = f \rightarrow \frac{dc}{a} - \frac{dby}{a} + ey = f \rightarrow cd - bdy + aey = af \rightarrow (ae - bd)y = af - cd \rightarrow y = \frac{af-cd}{ae-bd}$ e sostituita nella prima $x = \frac{c-by}{a} = \frac{\frac{cae-cbd-abf+bcd}{ae-bd}}{a} = \frac{cae-bcd-abf+bcd}{a(ae-bd)} = \frac{a(ce-bf)}{a(ae-bd)}$ e quindi
$\begin{cases} x = \frac{ce-bf}{ae-bd} \\ y = \frac{af-cd}{ae-bd} \end{cases}$ da cui si vede che entrambe le soluzioni hanno a denominatore $D = ae - bd$ e questo deve verificare $D \neq 0$ per poter risolvere univocamente il sistema, cioè esiste il (singolo) punto di intersezione delle rette.

Definizione di determinante

Considerando il denominatore della soluzione del sistema e i numeratori $D_x = ce - bf$ e $D_y = af - cd$, la struttura dei vari termini è molto simile, proviamo scrivere solo i coefficienti del sistema $\begin{matrix} a & b \\ d & e \end{matrix}$.
Questi formano una tabella che solitamente viene racchiusa da parentesi tonde $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ che si chiama **matrice** dei coefficienti, essendo formata da 2 righe e da 2 colonne è una matrice 2x2.

---

[1] Anche le precedenti equazioni $ax + b = 0$ e $Ax^2 + Bx + C = 0$ possono essere pensate come il problema di trovare i punti di intersezione tra la retta $y = ax + b$ o la parabola $y = Ax^2 + Bx + C$ con l'asse x ($y = 0$) e quindi sono la soluzione dei sistemi $\begin{cases} y = ax + b \\ y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = Ax^2 + Bx + C \\ y = 0 \end{cases}$

Definiamo ora **diagonale principale** quella formata dai numeri $\begin{pmatrix} a & \\ & e \end{pmatrix}$ e **diagonale secondaria** $\begin{pmatrix} & b \\ d & \end{pmatrix}$, si osserva che D è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale meno quelli sulla diagonale secondaria, tale operazione si chiama **determinante** (det) della matrice

$det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = ae - bd.$

Tale operazione si indica anche con barre (come un valore assoluto anche se il determinante può avere qualunque valore reale) della tabella $D = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd.$

Osserviamo che i valori a secondo membro del sistema (termini noti) formano una tabella di 2 righe e una colonna $\begin{matrix} c \\ f \end{matrix}$ e quindi una matrice 2x1 ovvero $\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$. Se ora sostituiamo questa colonna alla prima colonna della matrice dei coefficienti (sono i coefficienti dalla incognita x) si ha

$\begin{pmatrix} c & b \\ f & e \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - bf = D_x$

e se sostituiamo invece la seconda colonna (y)

$\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - cd = D_y$.

Da questo discende il metodo di Cramer per risolvere i sistemi lineari 2x2 $x = \frac{D_x}{D}$ e $y = \frac{D_y}{D}$.

Per completezza vediamo il significato del determinante nullo: se $D = 0$ non c'è soluzione univoca ma se anche $D_x = 0$ e $D_y = 0$ ci sono infinite soluzioni (le due rette delle singole equazioni sono coincidenti), se non sono zero allora le 2 rette sono parallele ma non coincidenti e quindi nessun punto di intersezione.

È possibile generalizzare anche a sistemi con più equazioni e più incognite (sempre però in numero uguale quindi matrici quadrate).
A noi interessa solo il caso 3x3 e in pratica per la generalizzazione dell'operazione di determinante.
In tal caso si sceglie una riga e in particolare la prima (si potrebbe scegliere anche una diversa riga o anche una colonna ma il caso generale non ci interessa) e si sviluppa il determinante a partire da questa riga.

La matrice ad esempio sarà $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. I coefficienti della prima riga sono $a \quad b \quad c$, osserviamo che a si trova in posizione prima riga prima colonna (1,1), b in (1,2) e c in (1,3).

Si definisce l'operazione come $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg).$

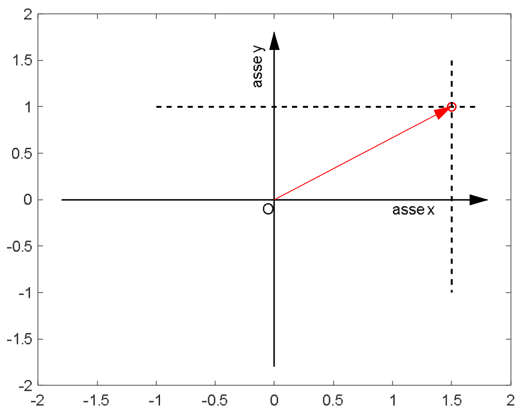
I determinanti 2x2 sono quelli delle sottomatrici di A che si ottengono cancellando la riga e la colonna a cui appartiene l'elemento, ad esempio per b: $\begin{pmatrix} & & \\ d & & f \\ g & & i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix}$.

Osserviamo che tale procedura si può iterare a qualunque matrice quadrata di dimensione superiore (si prende una riga m, si esegue il prodotto di un elemento in posizione (m, n) della riga per il determinante della sottomatrice corrispondente moltiplicati ancora per $(-1)^{m+n}$, si sommano questi prodotti su tutti gli elementi della riga scelta). Ad esempio partendo da una matrice 4x4 ci si riduce alla somma di determinanti di matrici 3x3 che poi si riducono a 2x2 (quelli che sappiamo calcolare).

A noi interessa solo il caso 3x3 perché lo **spazio fisico in cui viviamo ha 3 dimensioni**.

Posizione nel piano cartesiano

Riprendiamo il concetto di piano cartesiano. La posizione di un punto P si esprime dando ascissa e ordinata (**coordinate cartesiane**) del punto $P = (x_P, y_P)$, valori ottenuti dall'intersezione delle perpendicolari con gli assi coordinati.



Questo può essere graficamente indicato da un segmento orientato (una freccia) che **parte dall'origine** e che termina sul punto. Chiamiamo questo segmento orientato **vettore**.

Questo vettore con significato geometrico è il capostipite della famiglia di tutti i vettori che vedremo nel corso.

Un vettore ha una **doppia rappresentazione**:
-rappresentazione **geometrica** (o **sintetica**) tramite il segmento orientato
-rappresentazione **analitica** tramite la coppia ordinata (perché siamo in 2 dimensioni) di numeri reali (x_P, y_P).

Nella rappresentazione sintetica non c'è bisogno di assi cartesiani, si disegna il segmento orientato.

Nella rappresentazione analitica bisogna prima definire gli assi cartesiani (**sistema di riferimento**) ovvero dare gli assi x e y e origine degli assi O. Definito il sistema di riferimento possiamo trovare le coordinate (x_P, y_P).

Per il corso sono necessarie entrambe le rappresentazioni ed è importante capire la differenza tra le due rappresentazioni perché le operazioni che coinvolgono vettori possono essere definite in ambito sintetico o analitico e ovviamente danno gli stessi risultati quando si possono definire in entrambi gli ambiti.

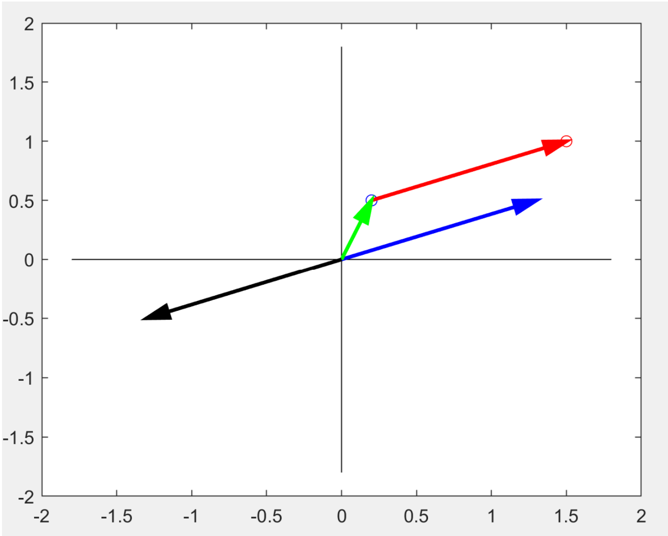
Quelle definite in ambito analitico possono essere utilizzate in modo più generale anche tramite l'uso di un computer (che lavora sui numeri reali delle coordinate), quelle sintetiche in genere no.

<u>Geometrico</u>: Un vettore è un segmento orientato e quindi giace su una retta che si chiama **direzione**. È definita un'orientazione sulla retta che si dice **verso** del vettore e che è individuata dalla freccia (ha due valori perché la freccia può essere messa in due modi). Infine il segmento ha una lunghezza che si chiama **modulo** del vettore.

Analitico: Un vettore è individuato dalle sue coordinate (x_P, y_P), per come abbiamo preso le coordinate, la retta su cui giace passa per l'origine e ha espressione $y = (y_P/x_P)x$. Il verso dipende delle coordinate: il verso opposto lo si ottiene considerando le coordinate opposte a quelle date $(-x_P, -y_P) = -(x_P, y_P)$.

La rappresentazione geometrica mostra che **il vettore è individuato da tre quantità**: **direzione, verso e modulo**.

Per fornire l'informazione che un oggetto è un vettore usiamo una lettera sormontata da una freccia: il vettore $\vec{v}$.
Esistono modi alternativi come sottolineare $\underline{v}$ o usare il grassetto $\boldsymbol{v}$. Il caso del grassetto viene spesso usato nei libri ma è da sconsigliare perché è fuorviante, senza fare attenzione la lettera in grassetto viene scambiata per un normale valore letterale (ad esempio si interpreta per il modulo del vettore), mentre è un vettore.



D'altra parte la rappresentazione analitica mostra alcune altre cose: tutti i punti del piano sono raggiungibili da vettori spiccati dall'origine ma non tutti i vettori che si possono definire hanno il punto di inizio (**punto di applicazione**) nell'origine: come si rappresentano questi vettori?

Un esempio è il vettore rosso in figura il cui punto di applicazione è individuato dal vettore verde.
Introduciamo il concetto di **traslazione rigida** o **parallela**, ovvero un segmento spostato ma in modo parallelo ovvero la (retta) direzione cambia ma è sempre parallela a quella di partenza.

I vettori così definiti, quello originale e quello traslato, si dicono **equipollenti**.

Un vettore $\vec{v}$ con punto di applicazione non nell'origine si sposta con traslazione rigida nell'origine diventando il vettore equipollente $\vec{v}_O$ (vettore blu).

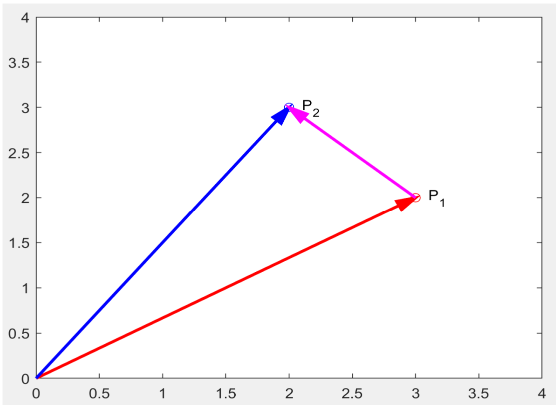
Per tale vettore sappiamo trovare le coordinate (mediante proiezione ortogonale sugli assi) che saranno $(v_x, v_y)_O = \vec{v}_O$.
Al vettore di partenza $\vec{v}$ verranno associate le stesse coordinate di quello con punto di applicazione nell'origine $\vec{v} = (v_x, v_y)_O$.

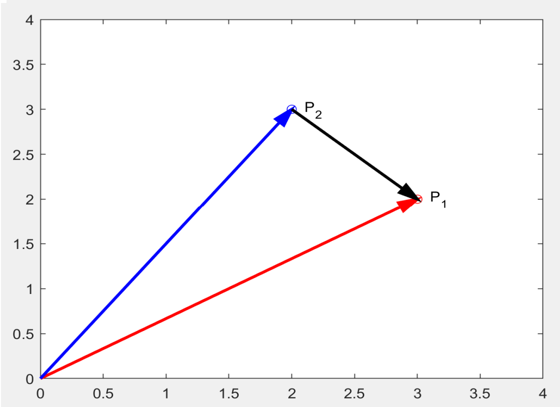
Questo modo di procedere fa vedere che tutti i **vettori che per spostamento nell'origine danno luogo allo stesso vettore hanno le stesse coordinate e si possono definire uguali**.
Ad esempio possiamo dire il vettore blu è uguale a quello rosso. L'esempio geometrico potrebbe sembrare strano ma pensando che i vettori siano delle velocità si sta dicendo che il corpo che si muove con velocità rossa ha la stessa velocità del corpo che si muove con velocità blu anche se i corpi procedono su corsie differenti.
Oppure la forza blu è uguale a quella rossa anche se sono applicate a punti differenti.

Questo modo di procedere risolve il problema: i vettori possono avere punto di applicazione qualunque anche se ciò comporta una indeterminazione se diamo solo le coordinate: **esistono infiniti vettori equipollenti ovvero con le stesse coordinate**.

Però anche l'informazione del punto di applicazione potrebbe essere importante e anche per superare l'ambiguità del caso spaziale (ovvero il vettore rosso e quello blu hanno qualcosa di diverso), il modo più generale di definire un vettore è tramite le **coordinate più il punto di applicazione**, in tal modo il vettore è univocamente definito anche per la rappresentazione analitica.
Se il punto di applicazione non è importante conoscerlo ci sono infiniti vettori equipollenti a quello dato, se invece è importante sapere il punto di applicazione e quindi lo conosciamo stiamo indicando un solo vettore.

In figura è anche mostrato il vettore (nero) **opposto** a quello blu (quindi le coordinate sono quelle del vettore blu cambiate di segno) che per traslazione rigida si può portare a coincidere come segmento con il vettore rosso, solo l'orientazione è differente.





Osserviamo inoltre che se conosciamo le coordinate degli estremi del segmento vettore $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ il **vettore che è orientato da $\boldsymbol{P_1}$ a $\boldsymbol{P_2}$ avrà coordinate** $P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$(vettore magenta) e il **vettore opposto orientato da $\boldsymbol{P_2}$ a $\boldsymbol{P_1}$ ovviamente avrà coordinate** $P_1 - P_2 = -(P_2 - P_1) = -(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ (vettore nero).

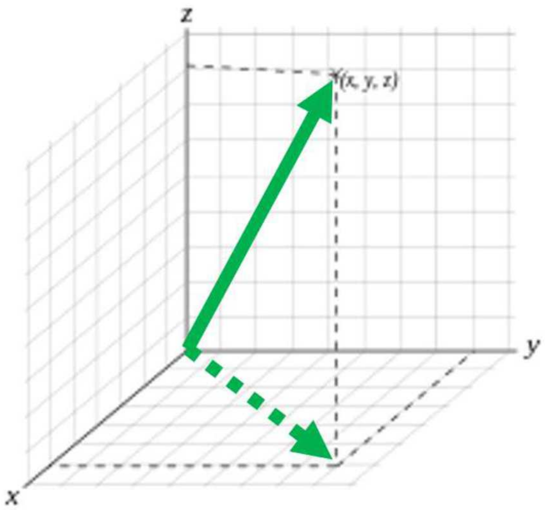
Inoltre se vogliamo fornire l'informazione completa **il vettore** $P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ **dovrà essere accompagnato dal punto di applicazione** $P_1 = (x_1, y_1)$ che è esso pure un vettore, mentre $P_1 - P_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ ha punto di applicazione $P_2 = (x_2, y_2)$.

Si può dire che sopra abbiamo eseguito la differenza tra i punti (vettori). Tale operazione verrà chiarita quando parleremo delle operazioni tra vettori.

In ambito analitico, il **modulo** del vettore che ha punto di applicazione nell'origine degli assi e di coordinate (x_P, y_P), **si trova applicando il teorema di Pitagora** al triangolo rettangolo che ha per vertici l'origine, il punto dove si trova la punta della freccia e il punto sull'asse x dove si proietta ortogonalmente la punta della freccia: i cateti hanno perciò lunghezza pari a x_P e y_P, da cui indicando il modulo con la stessa lettera del vettore ma senza freccia oppure con barre verticali (come il modulo o valore assoluto di un valore, il modulo è in effetti sempre ≥ 0) attorno al vettore:
$v = |\vec{v}| = \sqrt{{x_P}^2 + {y_P}^2}$.

Ribadiamo che scrivere il vettore in grassetto $\boldsymbol{v}$ e il suo modulo (che è un numero reale) v richiede attenzione da parte del lettore per distinguere la differenza fra le due quantità.

Concludiamo considerando il caso dello spazio fisico che ha 3 dimensioni.
La rappresentazione geometrica diviene più difficile (è più complesso disegnare in 3D) mentre quella analitica incrementa un po' il numero di operazioni ma non presenta difficoltà concettuali ulteriori.



Gli assi cartesiani ortogonali divengono 3 e quindi la proiezione ortogonale su di essi fornisce 3 coordinate che formano una terna ordinata (x_P, y_P, z_P).
Il modulo del vettore si può calcolare osservando che la proiezione del vettore sul piano xy genera il vettore verde tratteggiato. Il triangolo rettangolo ha per ipotenusa il vettore (verde), un cateto (vettore tratteggiato verde) di lunghezza l_{xy} e l'altro è l'altezza tratteggiata di lunghezza z_P.
Applicando il teorema di Pitagora: $|\vec{v}| = \sqrt{{l_{xy}}^2 + {z_P}^2}$ ma il cateto verde tratteggiato forma con l'asse x un altro triangolo rettangolo, in cui l'ipotenusa è proprio il lato verde tratteggiato e riapplicando il teorema di Pitagora ${l_{xy}}^2 = {x_P}^2 + {y_P}^2 \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{{x_P}^2 + {y_P}^2 + {z_P}^2}$ (che in certo senso è la generalizzazione a 3D del teorema di Pitagora).

Quindi **il modulo al quadrato è la somma delle componenti al quadrato** e questo vale in qualunque dimensione (anche oltre le 3 dimensioni!)
1D: $v^2 = {x_P}^2$, in 2D $v^2 = {x_P}^2 + {y_P}^2$ in 3D $v^2 = {x_P}^2 + {y_P}^2 + {z_P}^2$.

Breve cenno al prodotto tra matrici e vettori

Riprendiamo il caso del sistema lineare $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ e proviamo a vederlo come tre elementi distinti:
la matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$, il vettore delle incognite $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ scritto in forma di colonna anziché riga (come visto prima sarebbe stato $\vec{v} = (x, y)$) e il vettore dei termini noti $\vec{t} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$.
Scriviamoli in questo modo $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$: per ottenere la prima riga del sistema dovrei fare questa operazione $(a\ b) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by)$ cioè definire una operazione che consiste nel moltiplicare la prima riga con la colonna delle incognite prendendo gli elementi corrispondenti (il primo con il primo, il secondo con il secondo) e poi sommare questi prodotti.
Si chiama **prodotto righe per colonne** proprio questa operazione che si esegue tra matrici: la prima matrice ha tante colonne quante sono le righe della seconda altrimenti non si può fare l'operazione. Nel nostro caso la riga 1 con la colonna 1.
Poi seguendo la stessa regola $(d\ e) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (dx + ey)$ riga 2 per colonna 1.

Ora la riga 1 (× colonna 1) si eguaglia alla riga 1 (colonna 1) dei termini noti; la riga 2 (× colonna 1) si eguaglia alla riga 2 (colonna 1) dei termini noti.

Con matrici 3x3 si avrebbe
$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ u \\ v \end{pmatrix}$: prima riga [prima colonna] $(a\ b\ c)(x\ y\ z) = (ax + by + cz)$, seconda riga [prima colonna] $(d\ e\ f)(x\ y\ z) = (dx + ey + fz)$, terza riga [prima colonna] $(g\ h\ i)(x\ y\ z) = (gx + hy + iz)$ e queste eguagliate ai termini noti.

Riscrivendo in forma "da sistemi lineari"

$$\begin{cases} ax + by + cz = t \\ dx + ey + fz = u \\ gx + hy + iz = v \end{cases}$$

Questa operazione righe per colonne si può fare anche tra vettori che si possono considerare particolari matrici a 1 riga (come solitamente vengono scritti) oppure a 1 colonna.
I vettori siano $\vec{v} = (a, b, c)$ e $\vec{w} = (t, u, v)$, mettiamo il secondo sotto forma di vettore colonna, questa operazione di scambiare righe e colonne è la **trasposizione T**, $(t, u, v)^T = \begin{pmatrix} t \\ u \\ v \end{pmatrix}$, moltiplico il primo per il trasposto del secondo $(a, b, c)\begin{pmatrix} t \\ u \\ v \end{pmatrix} = at + bu + cv \rightarrow$ **da 2 vettori ottengo un numero reale**.

Facciamolo con lo stesso vettore $(a, b, c)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2$ →questo rappresenta il **quadrato del modulo del vettore**.

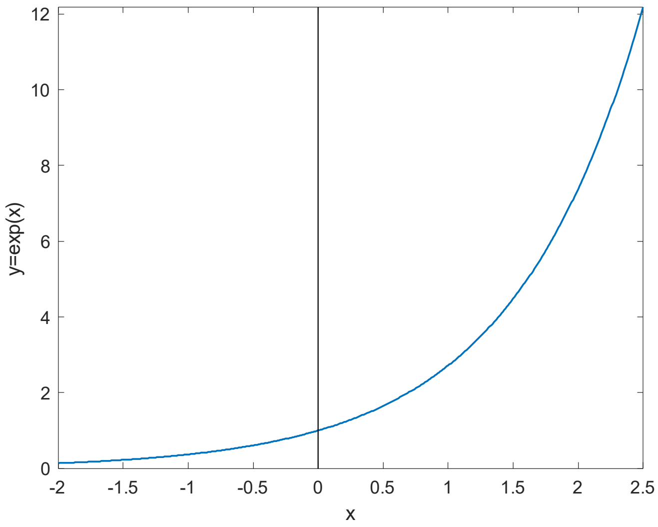
Proviamo a fare il trasposto del primo per il secondo inalterato, ora per ogni riga del primo c'è un solo elemento e c'è un solo elemento anche per le colonne del secondo e ciascuno per 3 volte, tenendo conto che sto mettendo insieme la riga 1 e colonna 1, riga 1 colonna 2, riga 1 colonna 3, riga 2 colonna 1, etc. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(t, u, v) = \begin{pmatrix} at & au & av \\ bt & bu & bv \\ ct & cu & cv \end{pmatrix}$ →**questo produce una matrice** con 3x3=9 elementi.

Questa moltiplicazione righe per colonne tra matrici verrà utilizzata per definire le operazioni tra vettori.

Funzioni di una variabile e pendenza

Le leggi fisiche sono relazioni fra grandezze e quindi si esprimono mediante funzioni cioè una relazione f che lega il valore di una variabile indipendente (solitamente chiamata x ma il simbolo conta poco, ad esempio in Fisica la variabile che scorre senza controllo è il tempo t) in modo univoco al valore della variabile dipendente y e si indica $f(x) = y$ (però potrebbe essere anche $x = g(t)$ dove la coordinata x cambia in funzione del tempo tramite la funzione g).
Tramite un piano cartesiano, la funzione può essere rappresentata mediante un grafico ed abbiamo già visto i casi della funzione lineare (polinomio di grado 1) e della parabola (polinomio di grado 2).

Le funzioni che verranno utilizzate durante il corso saranno quelle polinomiali, la funzioni trigonometriche trattate nel prossimo paragrafo, la funzione esponenziale ($y = e^x$ o anche $y = \exp(x)$ e la sua inversa cioè il logaritmo ($y = \ln(x)$ o anche $y = \log(x)$ ed essendo l'inversa $\ln(\exp(x)) = x$ ed anche $\exp(\ln(x)) = x$)



La base della potenza è la costante (irrazionale) di Nepero (od anche di Eulero) $e = 2.718281828459046$ ....

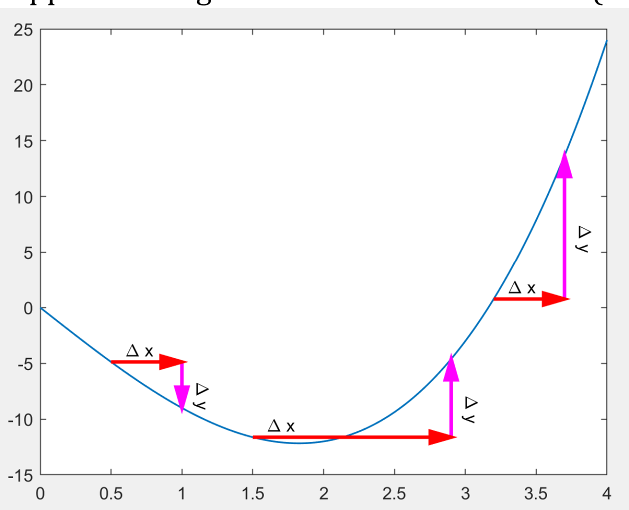
In figura è mostrata la funzione esponenziale sempre positiva definita per qualunque valore reale che tende a zero asintoticamente per $x \to -\infty$ e diverge a $+\infty$ per $x \to +\infty$, in zero ha valore 1 ($e^0 = 1$).

Un concetto molto importante in Fisica è la **variazione di una funzione** ovvero se faccio variare la variabile indipendente x come varia la variabile dipendente y.
Questa potrebbe essere chiamata anche **pendenza della funzione**. Se una strada ha pendenza vuol dire che se mi muovo di una certa quantità, la quota della strada cambia.

Per quantificare introduciamo la **notazione per le differenze** Δ (delta). Con questo simbolo **indichiamo in Fisica la differenza tra la quantità finale meno quella iniziale**: $\Delta x = x_f - x_i$ (e $x_f = x_i + \Delta x$) e $\Delta y = y_f - y_i$ con i valori $y_i = f(x_i)$ e $y_f = f(x_f)$.

La pendenza p è perciò espressa da $p = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ che si chiama **rapporto incrementale,** più è grande p e maggiore sarà la pendenza della strada.

Se il rapporto incrementale è positivo la funzione cresce (la strada è in salita) mentre se il rapporto è negativo la funzione decresce (strada in discesa). Nella figura si sono utilizzate frecce per rendere evidente se l'incremento Δy è positivo o negativo.

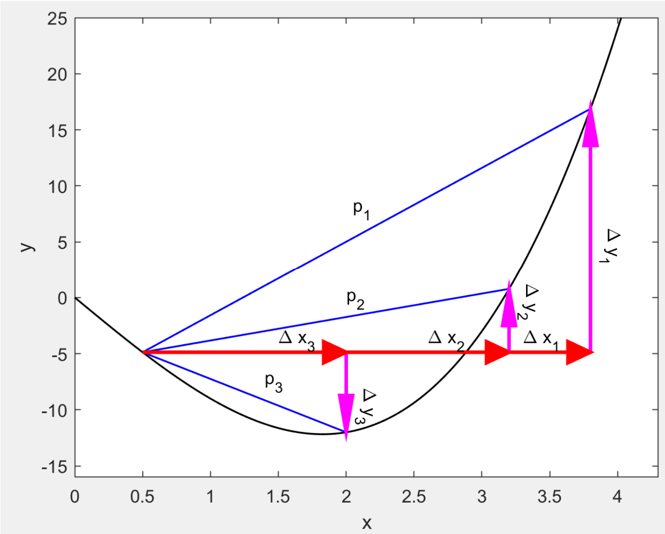


Se la distanza tra punto iniziale x_i e finale x_f è grande la strada potrebbe, per certi tratti tra il punto iniziale e quello finale, cambiare pendenza (come tra $x_i = 1.5$ e $x_f = 2.9$) quindi il rapporto incrementale fornisce la **pendenza media**.

Per descrivere meglio la pendenza, conviene prendere il punto finale vicino a quello iniziale: quanto vicino?

Matematicamente dobbiamo prenderlo sempre più vicino affinché Δx tenda a zero senza però mai arrivare a zero: questo è il concetto di **limite** e ora la pendenza è conosciuta su un tratto che va zero e quindi punto per punto.

In figura è mostrato il procedimento per il punto iniziale $x_i = 0.5$ e punti finali che via via si avvicinano $x_{f1} = 3.8$, $x_{f2} = 3.2$ e $x_{f3} = 2$: si osserva un cambiamento della pendenza media



$p_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} \rightarrow p_2 = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} \rightarrow p_3 = \frac{\Delta y_3}{\Delta x_3}$.

Cosa succede a Δy?
Nella figura avvicinando il punto finale a quello iniziale, Δy da positiva, si annulla e poi diventa negativa, ha un minimo ma se il punto finale ha valori inferiori a 1.5 tende a diventare in modulo sempre più piccola.

Quindi anche questa differenza Δy tende a zero però la pendenza $p = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ che è il rapporto di quantità piccole come si comporta?

Detto in altri termini, qual è il limite della pendenza per $\Delta x \rightarrow 0$ (Δx che tende a zero)?

.

Osserviamo che la pendenza dipende dai valori iniziale e finale ma facendo il **limite dipende solamente dal valore iniziale** (perché il valore finale x_f tende a coincidere con quello iniziale x_i), quindi nel limite diventa una funzione $p(x_i)$.

Vediamo alcuni esempi sui polinomi.

- Se la funzione è una costante (strada orizzontale, quota costante) $f(x) = a$ valore costante, la pendenza si calcola facendo la differenza tra due punti $p = \frac{a-a}{x_f - x_i} = 0$ e come ci aspettavamo la pendenza è nulla e per $\Delta x \rightarrow 0$ il valore è sempre zero, in qualunque punto noi calcoliamo la pendenza.

- Se la funzione è lineare $f(x) = ax$ (retta passante per l'origine) la pendenza è $p = \frac{(ax_f)-(ax_i)}{x_f - x_i} = a\frac{x_f - x_i}{x_f - x_i} = a$, facendo il limite per $\Delta x \rightarrow 0$ il valore è sempre il coefficiente angolare della retta a. Come ci aspettavamo la pendenza di una retta è costante in ogni punto.

- Se la funzione è una parabola del tipo $f(x) = ax^2$, la pendenza è $p = \frac{(ax_f{}^2)-(ax_i{}^2)}{x_f - x_i} = a\frac{(x_f{}^2 - x_i{}^2)}{x_f - x_i} = a\frac{(x_f - x_i)(x_f + x_i)}{x_f - x_i} = a(x_f + x_i) = a(x_i + \Delta x + x_i)$, facendo il limite per $\Delta x \rightarrow 0$, $x_f \rightarrow x_i$ e quindi la parentesi tende a $2x_i$ e la pendenza in ciascun punto x vale $p = 2ax$.

- Se la funzione è $f(x) = ax^3$, $p = \frac{(ax_f{}^3)-(ax_i{}^3)}{x_f - x_i} = a\frac{(x_f{}^3 - x_i{}^3)}{x_f - x_i}$, scriviamo $x_f = x_i + \Delta x$ da cui $x_f{}^3 = (x_i + \Delta x)^3 = x_i{}^3 + 3x_i{}^2\Delta x + 3x_i(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, facendo la differenza $p = \frac{3x_i{}^2\Delta x + 3x_i(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x_i{}^2 + 3x_i\Delta x + (\Delta x)^2$, facendo il limite per $\Delta x \rightarrow 0$ si ha $p \rightarrow 3x_i{}^2$

Dagli esempi vediamo che partendo da una certa potenza della x moltiplicata per un coefficiente, questa operazione di pendenza con il limite ci restituisce la potenza della x diminuita di uno e moltiplicata per l'esponente della potenza e moltiplicata per il coefficiente. Invece per il valore costante la pendenza con il limite è zero.

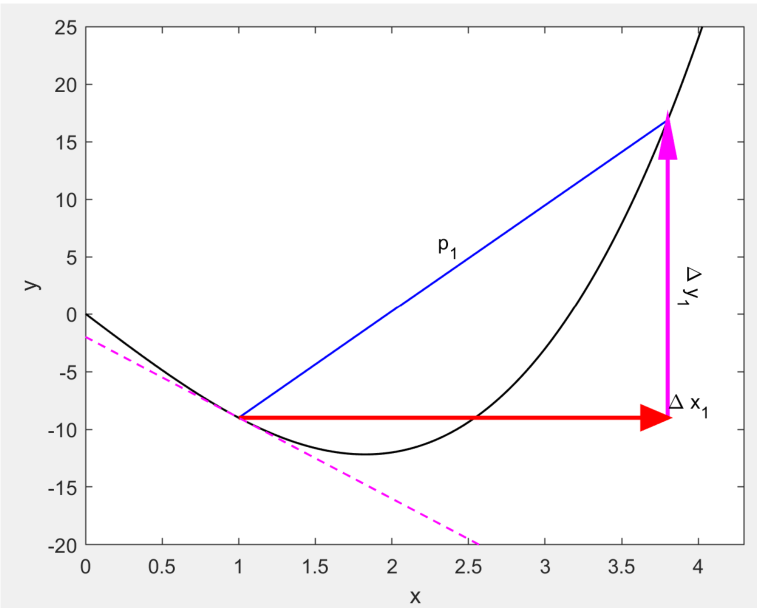
Possiamo costruire la seguente tabella

$a = ax^0 \rightarrow p(x) = 0\ ax^{-1} = 0;$
$ax = ax^1 \rightarrow p(x) = 1\ ax^{1-1} = a;$
$ax^2 \rightarrow p(x) = 2ax^{2-1} = 2ax;$
$ax^3 \rightarrow p(x) = 3ax^{3-1} = 3ax^2.$

- Generalizzando per ogni potenza $ax^n \rightarrow p(x) = nax^{n-1}$

Se il polinomio è completo, **l'operazione di pendenza si applica ad ogni termine della somma** perché il rapporto incrementale si spezza nella somma della pendenza di ogni singolo termine: ad esempio $3x^4 - 2x^2 + 5x - 3 \rightarrow p(x) = 12x^3 - 4x + 5$.

La funzione esponenziale ha la proprietà che la pendenza con limite fornisce la stessa funzione $\exp(x) \rightarrow p(x) = \exp(x)$ da questo nasce l'importanza di questa funzione: ovvero preso un punto sulla curva esponenziale, la pendenza in quel punto è pari al valore della funzione. Nell'appendice verrà trattata questa proprietà di derivazione di $\exp(x)$.
Se ci sono coefficienti moltiplicativi della funzione o dell'argomento $A\exp(Bx) \rightarrow p(x) = AB\exp(Bx)$.



Questa operazione di pendenza con limite si definisce **derivata della funzione** e si indica con $\frac{dy}{dx}$ (è il limite del rapporto incrementale) e come abbiamo visto è a sua volta una funzione.

Osserviamo che la pendenza data dal rapporto incrementale è quella del segmento blu della figura (pendenza media nel tratto Δx), facendo il limite la pendenza si trasforma nella pendenza della **retta tangente** nel punto iniziale (retta magenta tratteggiata).

Essa verifica alcune proprietà:

a) la derivata della somma è la somma delle derivate (usata prima per i polinomi completi) $\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$

b) la derivata di un prodotto $\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$

(esempio $[3x^2][\exp(x)] \rightarrow 6x\,[\exp(x)] + [3x^2]\exp(x)$ (le parentesi quadre per far capire le 2 funzioni del prodotto che poi vengono mantenute inalterate).

c) derivata di funzione di funzione $\frac{d(f(g))}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$ cioè prima si fa la derivata della f rispetto al suo argomento e poi dell'argomento g

(esempi $y = 5\exp(x^2) \rightarrow y = \exp(k)$ e $k = x^2 \rightarrow \frac{dy}{dk} = \exp(k)$; $\frac{dk}{dx} = 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dk}\frac{dk}{dx} = 5\exp(x^2)\,2x = 10x\exp(x^2)$;
$t^6 = (t^3)^2 \rightarrow y = w^2$ e $w = t^3 \rightarrow \frac{dy}{dw} = 2w$ e $\frac{dw}{dt} = 3t^2 \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dt} = 2w3t^2 = 2t^3 3t^2 = 6t^5$ risultato uguale a quello di effettuare direttamente la derivata su t^6

Vediamo ancora l'esempio di **potenze negative** $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

Quanto abbiamo ricavato per esponenti positivi vale anche per quelli negativi e quindi $\frac{dy}{dx} = (-n)x^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$ quindi la derivata di $\frac{1}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$.

Nella realtà **vale per qualunque potenza anche frazionaria (o irrazionale)** e quindi $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ha derivata $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Per la funzione logaritmo $y = \ln(x)$ si può utilizzare la proprietà legata alla derivata di funzione di funzione: se $y = \ln(x)$ allora $e^y = x$, derivando i due membri $e^y\frac{dy}{dx} = 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$ cioè $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.

La derivata può essere valutata anche sulla funzione derivata (che si chiama **derivata prima**) ottenendo la **derivata seconda** $\frac{d^2y}{dx^2}$: esempio partendo dalla funzione
$2x^4 - x^2 + \ln(x) \rightarrow$ derivata prima $8x^3 - 2x + \frac{1}{x} \rightarrow$ derivata seconda $24x^2 - 2 - \frac{1}{x^2}$.

Possiamo pensare al simbolo $\frac{d}{dx}$ che viene ripetuto $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}f)$ e quindi è al quadrato $\frac{d^2}{dx^2}$ e si dice "derivata seconda rispetto a x".

Si può effettuare la derivazione a qualunque ordine $(\frac{d^n}{dx^n})$ ("derivata ennesima rispetto a x"), nel corso saremo interessati soprattutto a derivate prime e seconde.

Osserviamo che se la funzione ha particolari discontinuità, il rapporto incrementale potrebbe non avere limite (impossibilità di calcolo della derivata). Ciò verrà affrontato nei corsi di Matematica, per il tipo di funzioni che incontreremo nel corso non esisterà questo problema.

Infine, l'uso di lettere differenti non deve confondere: anche se solitamente in problemi matematici x e y sono le variabili, qualunque lettera può essere scelta a patto che sia chiaro quale lettera è associata con la variabile indipendente.
Ad esempio il polinomio $p = a^2b^3 - 2a^5b^4c^2$ contiene 3 lettere:
- se si sceglie a come variabile indipendente, $\frac{dp}{da} = 2ab^3 - 10a^4b^4c^2$,

- se si sceglie b come variabile indipendente, $\frac{dp}{db} = 3a^2b^2 - 8a^5b^3c^2$,
- se si sceglie c come variabile indipendente, $\frac{dp}{dc} = -4a^5b^4c$
- se si sceglie x come variabile indipendente $\frac{dp}{dx} = 0$ perché $\boldsymbol{x}$ **non compare in** $\boldsymbol{p}$ e quindi **variazioni di** $\boldsymbol{x}$ **non fanno variare** $\boldsymbol{p}$, cioè p è una costante per queste variazioni.

Operazione inversa della derivazione

Infine possiamo domandarci se **conoscendo la derivata possiamo trovare la funzione di partenza**. Ovvero se conosciamo le pendenze possiamo ricavare l'andamento altimetrico della strada.
La risposta è affermativa ma bisogna tener conto che la derivata delle costanti è zero.

Detta $F(x)$ la funzione di partenza (**primitiva**) e $f(x) = \frac{dF}{dx}$ la sua derivata è possibile da f ritrovare la primitiva F a meno di una costante c: infatti $F + c$ ha la stessa derivata di F.

Esempio: sapendo che la primitiva ha derivata $5x^2 + \exp(x)$ la primitiva sarà $\frac{5}{3}x^3 + \exp(x) + c$: per verificarlo basta eseguire la derivata di $\frac{5}{3}x^3 + \exp(x) + c$ che deve ridare $5x^2 + \exp(x)$.

Questa operazione "inversa" della derivata si chiama **integrale** (**indefinito**) e si indica $\int f(x)dx = F(x) + c$, la costante aggiuntiva si chiama **costante di integrazione**.

Osserviamo che, in generale, il calcolo integrale su funzioni qualunque può essere molto complicato da eseguire ma, durante il corso, le funzioni su cui opereremo saranno quelle dette prima e quindi il calcolo integrale è risolubile con poco sforzo.

L'integrale però può essere specificato tra due punti (**integrale definito**) $\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx = F(x_f) - F(x_i)$ in tal caso la costante si elimina nella differenza tra primitive e l'integrale ora **fornisce un numero reale** e non più la famiglia di funzioni che differiscono per una costante.

Esempio: $\int_1^2 2x^2dx = \frac{2}{3}x^3|_1^2 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$. Il simbolo $|_1^2$ indica che la funzione primitiva deve essere valutata tra il punto 2 meno quella valutata nel punto 1.

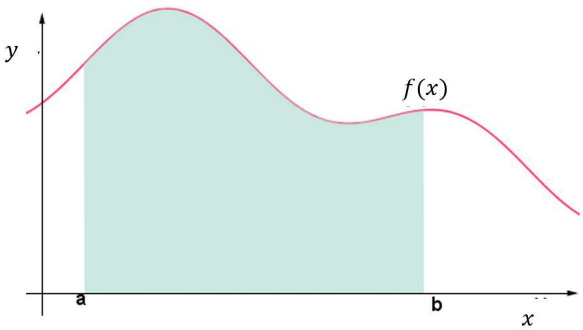
- Per verificare che $\frac{2}{3}x^3$ sia la primitiva basta eseguire la derivata di $\frac{2}{3}x^3 \rightarrow 2x^2$ che è la funzione dentro al segno di integrale (**funzione integranda**).

Poiché dx si può vedere come limite di $\Delta x \rightarrow 0$ ed è una quantità infinitesima, l'integrale si può pensare che effettui la somma delle pendenze per dx, ovvero somma i valori dF: infatti se prendiamo nel punto x_k il rapporto incrementale questo approssima per Δx piccolo la derivata $\frac{\Delta F}{\Delta x} \sim \frac{dF}{dx} = f(x_k)$ e quindi **l'incremento della funzione** primitiva $\Delta F = F(x_k + \Delta x) - F(x_k) \sim f(x_k)\,\Delta x \rightarrow F(x_k + \Delta x) \sim F(x_k) + f(x_k)\,\Delta x$ che è il valore della funzione nel punto successivo $x_k + \Delta x$ sapendo il valore di F nel punto x_k.

Sommando i vari $f(x_k)\,\Delta x$ intermedi tra un punto iniziale e uno finale si ottiene la variazione tra il punto iniziale e quello finale: $F(x_f) \sim F(x_i) + f(x_i)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + \cdots$ e la costante di integrazione è proprio il **valore inziale** $F(x_i)$.

Questo fornisce anche un metodo approssimato per il calcolo integrale, utilizzato nelle valutazioni numeriche al computer.

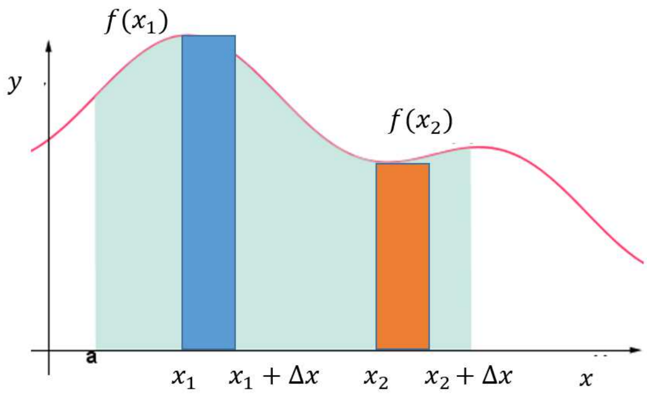
È utile pensare **all'integrale come il concetto di somma di quantità infinitesime** $f(x)dx$, infatti il simbolo di integrale è una S (di somma) stilizzata.



Per chi avesse già incontrato alle superiori il calcolo integrale definito come calcolo di aree, diciamo che questo concetto che vien qui dato non è in contraddizione con quella definizione ma questo concetto è più generale.

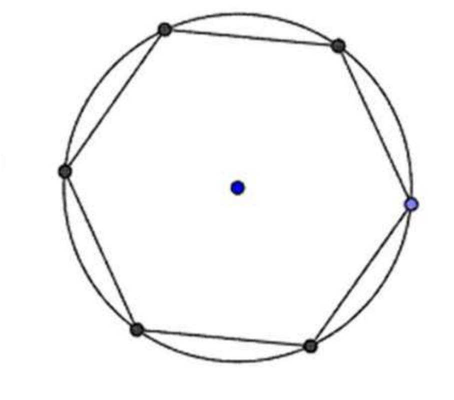
Infatti l'integrale definito di una funzione $y = f(x)$ tra due punti a e b è $\int_a^b f(x)dx$ e il suo valore fornisce l'area della regione colorata.

Questa la possiamo pensare come la somma delle aree dei rettangoli di altezza $f(x)$ e base dx (infinitesima che è il limite di una base finita $\Delta x \to 0$) aventi un'area $f(x)dx$ come mostrato in figura per il rettangolo blu fra i punti x_1 e $x_1 + \Delta x$, perciò sommo le aree di tutti i rettangoli (infinitesimi) che compongono l'area colorata.



Notiamo che il rettangolo blu di base finita Δx approssima per eccesso l'area della regione mentre il rettangolo ocra l'approssima per difetto ma nel limite con la base che diventa infinitesima l'approssimazione diventa esatta (e il numero di rettangoli che devono coprire la regione colorata diventa infinita). Quindi, dividendo la regione colorata in rettangoli di ugual base (finita) $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (cioè intervalli come in figura da x_i a $x_i + \Delta x$ con i da 1 a n) e sommando le loro aree (indicata dal simbolo di sommatoria da 1 a n)
$\sum_1^n f(x_i)\Delta x$, il limite della sommatoria per $n \to \infty$ è l'integrale $\sum_1^n f(x_i)\Delta x \to \int_a^b f(x)dx$.

Durante il corso incontreremo vari tipi di integrale legati a quantità fisiche differenti ma l'idea che **stiamo sommando delle quantità che da finite diventano infinitesime** rimane quella che è consigliabile utilizzare.



Inoltre, si può tornare indietro riscrivendo l'integrale come la sommatoria di n **quantità che non sono necessariamente delle aree** e a volte questo può essere utile in alcune dimostrazioni (oltre a fornire un modo per valutare in modo approssimato l'integrale come sommatoria finita).
Si pensi ad esempio di valutare la lunghezza della circonferenza di raggio r che è una curva. Un'approssimazione alla lunghezza è il perimetro (somma dei lati) di un poligono regolare di n lati (potrebbe essere inscritto (come in figura) e quindi approssimazione per difetto o circoscritto e quindi

approssimazione per eccesso). Il limite per $n \to \infty$ ci fornisce la lunghezza della circonferenza.

Per i nostri scopi lo possiamo vedere come la somma delle lunghezze l_n dei segmenti (lati del poligono), valori che diventano infinitesimi nel limite $\sum_1^n l_n \to \int_{circonferenza} dl$ e questo integrale viene chiamato integrale di linea e vale $2\pi r$ (vedere l'Appendice per la dimostrazione anche utilizzando le proprietà delle funzioni trigonometriche).

È importante in questo processo di limite dalla sommatoria all'integrale capire quale quantità è quella che diventa infinitesima (e per indicarlo acquista una d prima del suo simbolo all'interno dell'integrale).

Concludiamo con alcune proprietà dell'integrale che si potrebbero dimostrare proprio scrivendolo come sommatoria e facendo successivamente il limite:

somma di funzioni $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
ed anche $\int \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

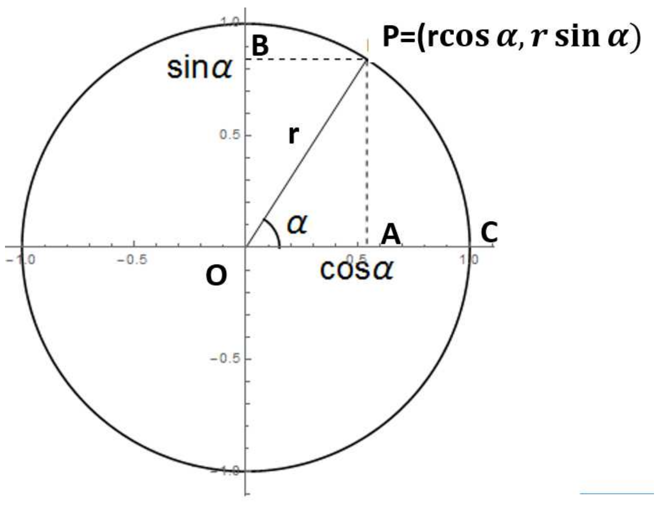
se dividiamo l'intervallo di integrazione definita da a a b in due parti ponendo un punto c intermedio $(a < c < b)$ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Infine, se scambiamo gli estremi di integrazione a e b, l'integrale cambia segno $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Digressione sulla trigonometria

Tra tutte le funzioni trigonometriche quelle che interessano per il corso sono il seno, il coseno e la tangente che è rapporto tra seno e coseno.

Infatti, per il calcolo delle coordinate le **funzioni trigonometriche utili sono seno e coseno**.



Consideriamo una circonferenza (nell'esempio di **raggio $r = 1$** ma potrebbe avere qualunque valore) centrata nell'origine e consideriamo il raggio dall'origine O al punto P.

La **proiezione ortogonale di P** sull'asse x sia A e sull'asse y sia B: il **coseno dell'angolo** α tra il raggio considerato e l'asse x è legato alla misura del segmento OA, il **seno dell'angolo** è legato alla misura di OB. Più correttamente sono dati dal rapporto con il raggio $\frac{OA}{r}$=cos α e $\frac{OB}{r}$=sin α.

Quindi le coordinate del punto sono $P = (r\cos\alpha\, , r\sin\alpha)$, relazione valida per qualunque valore di r.

Consideriamo ora il triangolo OAP retto in A: l'ipotenusa è proprio OP=r e la misura dei 2 cateti si ottiene proprio dalle funzioni seno e coseno.

Osserviamo che gli angoli naturali da utilizzare in queste funzioni sono in **radianti** che saranno anche introdotti quando verrà trattato il Sistema Internazionale.

La misura dell'angolo in radianti (rad) è il valore del rapporto tra la lunghezza dell'arco CP con il raggio $\alpha = \frac{arco\ CP}{r}$.

La lunghezza di tutta la circonferenza vale $2\pi r$ che corrisponde ad un angolo giro, perciò un **angolo giro vale $2\pi\ rad$, un angolo piatto $\pi\ rad$, e un angolo retto $\frac{\pi}{2}\ rad$**.

Inoltre è bene ricordarsi che per l'angolo in radianti, dalla sua definizione, vale la relazione tra la lunghezza di un arco, raggio e angolo $l = r\alpha$.
Questa relazione non è valida per gli angoli in gradi.

Per passare da un angolo in gradi+primi+secondi occorre mettere l'angolo in gradi in forma decimale ang ovvero esprimere primi e secondi in gradi ($1' = \frac{1}{60}°$, $1'' = (1/60)' = (1/3600)°$) e poi utilizzare la proporzione $x(rad): ang = \pi: 180°$ (infatti π rad corrisponde a 180°). Esempio: convertire in radianti 10° 2' 37"=$(10 + \frac{2}{60} + \frac{37}{3600})$°= 10.0436111…..=$ang$

$$x(rad) = \frac{ang \cdot \pi}{180} = ang\frac{\pi}{180} = 0.1752940 \dots\ rad$$

Le funzioni coseno e seno sono definite per ciascun valore dell'angolo α (da $-\infty$ a $+\infty$) e sono periodiche, dopo un angolo giro (2π radianti= 360°) si ripetono nello stesso modo.

Le 2 funzioni verificano $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2$=1 che è praticamente il teorema di Pitagora applicato al triangolo OAP di ipotenusa unitaria.

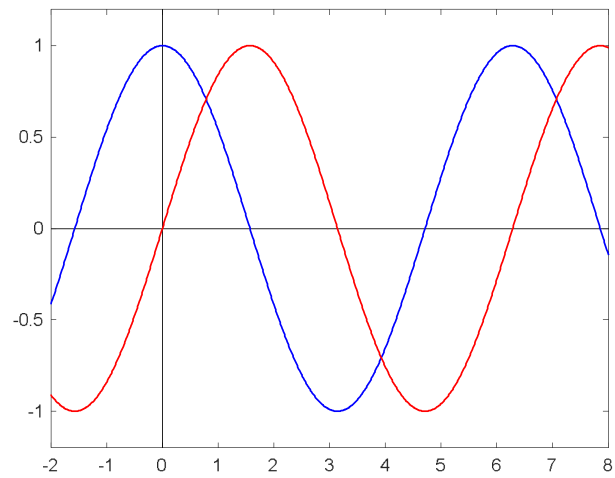
La funzione **tangente** è data dal rapporto $\mathrm{tg}(\alpha) = \tan(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ e chiaramente è definita solo se $\cos\alpha \neq 0$, ovvero angoli diversi da $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ (e multipli di π), per $\alpha \to \pm\frac{\pi}{2}$ la funzione tende a divergere ad ∞.

Osserviamo che la tangente come rapporto tra i due lati OB e OA fornisce l'incremento in verticale (OB) spostandoci di OA e quindi $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg(\alpha)$.
La **tangente è perciò legata alla pendenza** del raggio OP.

Le pendenze delle strade forniscono la tangente dell'angolo di pendenza della strada: per esempio una pendenza del 5% va intensa $tg(\alpha) = 0.05$ e utilizzando la funzione inversa (arcotangente) $\mathrm{atan}(0.05) = arctg(0.05) \approx 0.083\ rad \approx 2.9°$.

Nel limite, la pendenza diventa la derivata di una funzione e quindi l'angolo di pendenza α della retta tangente nel punto x_0 in cui la derivata viene valutata verifica $\frac{dy}{dx}|_{x_0} = tg(\alpha)$.

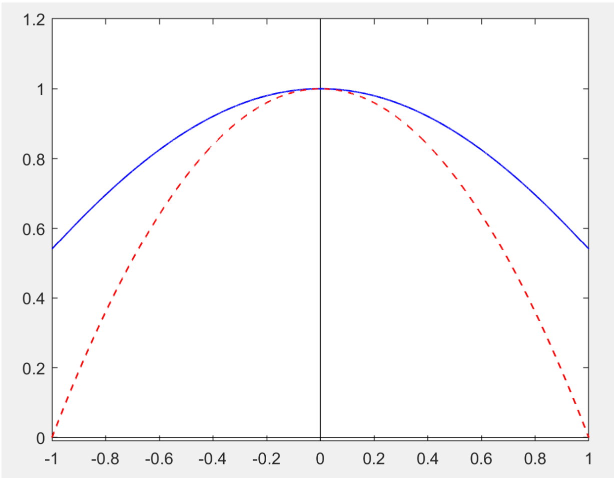
Nella figura sono rappresentati $y = \cos x$ (curva blu che ha valore 1 in $x = 0$) e $y = \sin x$ (curva rossa valore 0 in $x = 0$) nell'intervallo da -2 a 8 radianti.



Le funzioni sono essenzialmente uguali con il seno che è traslato di $\frac{\pi}{2}$(=1.570796...) rispetto al coseno. I valori delle funzioni sono compresi tra -1 e 1.

In $x = 0$ esse valgono $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.
In $x = \frac{\pi}{2}$ esse valgono $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.
In $x = \pi$ esse valgono $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$.

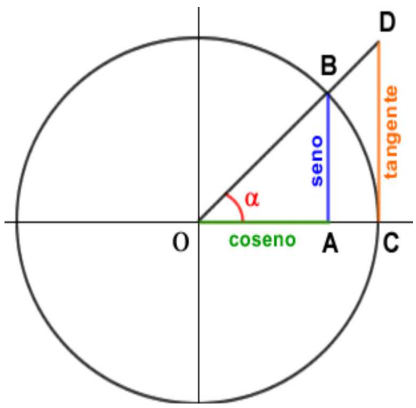
Il **seno è una funzione dispari** $\sin(-x) = -\sin x$ mentre il **coseno è una funzione pari** $\cos(-x) = \cos x$.



La funzione coseno per piccoli angoli ($|\theta| \ll 1$ molto minore di 1 radiante) attorno allo zero presenta un andamento simile a una parabola rivolta verso il basso con espressione $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ (linea rossa tratteggiata) e quindi può essere approssimato da questa parabola.

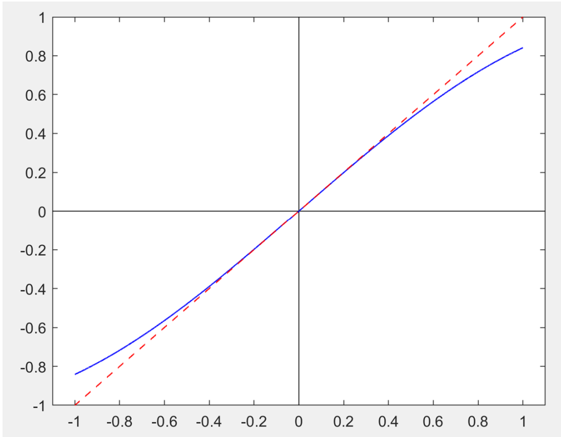
Invece la funzione seno per piccoli valori dell'angolo ha la proprietà di essere approssimabile con l'argomento $\sin\alpha \cong \alpha$ (per $|\alpha| \ll 1\, rad$).

Infatti dal punto di vista geometrico, essendo l'angolo $\alpha = \frac{arco\ CP}{r}$ e $\sin\alpha = \frac{AP}{r}$, significa che per angoli piccoli la lunghezza dell'arco CP tende ad assumere lo stesso valore del segmento AP.
Questo lo si può vedere anche considerando la tangente $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ che nel disegno a lato è data sia da $\frac{AB}{OA}$ sia da $\frac{CD}{OC}$ per la similitudine dei triangoli rettangoli OAB e OCD.



Si vede chiaramente che le lunghezze verificano la seguente disuguaglianza $AP < arco\ BC < DC$, dividendo per il raggio $\sin(\theta) < \theta < tg(\theta)$.
Ma per angoli piccoli $\cos\alpha \to 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ e trascurando rispetto a 1 un termine piccolo si ottiene
$tg(\alpha) \cong \frac{\sin\alpha}{1} = \sin\alpha$ ma se la tangente tende al seno, l'angolo che sta in mezzo alla disuguaglianza tra seno e tangente tende anche lui al seno da cui $\sin(\alpha) \cong \alpha \cong tg(\alpha)$, quindi anche la tangente per angoli piccoli ($\alpha \ll 1$) ha la proprietà $tg(\alpha) \cong \alpha$.

Nella figura a fianco la funzione seno (curva blu) è confrontata con la retta $y = x$ (linea rossa tratteggiata).



Queste proprietà del seno e della tangente verranno utilizzate nel corso.

Per la scrittura, osserviamo che in italiano il seno è abbreviato in sen ma in inglese è sin soprattutto se si usano programmi di calcolo commerciali.

Chi ha studiato trigonometria nelle superiori sa che le funzioni trigonometriche posseggono alcune proprietà, ne ricorderemo alcune sulla **somma di angoli**:
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Da cui derivano quelle sull'**angolo doppio**
$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\beta$
$\cos(2\alpha) = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2$

Le formule per somma o differenza con $\frac{\pi}{2}$ che potrebbero essere utili nella risoluzione di problemi in cui è necessario trovare le proiezioni ortogonali costruendo triangoli rettangoli:
$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{2} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{2} = \cos\alpha$, $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$

$\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{2} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{2} = -\sin\alpha$, $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin\alpha$

La derivata delle funzioni trigonometriche è
$y = \cos(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin(x);$
$y = \sin(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(x)$

La dimostrazione di queste derivate verrà mostrata nei corsi di Matematica e quindi noi la assumiamo.

Per la tangente usiamo le proprietà della derivata per i prodotti di funzioni $y = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(x)\frac{1}{\cos(x)} - \sin(x)\frac{1}{(\cos x)^2}(-\sin(x)) = \frac{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}.$

Derivando una seconda volta
$\frac{d^2\cos x}{dx^2} = \frac{d(-\sin x)}{dx} = -\cos x$ e
$\frac{d^2\sin x}{dx^2} = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x,$
si riottengono le funzioni di partenza ma **cambiate di segno**.

2) Grandezze omogenee e misura

Le grandezze omogenee sono le grandezze che hanno la stessa natura e si possono confrontare e si possono sommare.
Questo è importante per l'operazione di **misura**. Infatti confrontare due grandezze omogenee G_1 e G_2 permette di stabilire se sono uguali o se una è maggiore dell'altra.

Il fatto di poter sommare mi consente, data una grandezza G, di prenderne n uguali e sommarle tra loro ottenendo la grandezza n volte G (o nG).
Questo fatto quindi permette più in generale di scegliere una grandezza di riferimento (**unità di misura**) U e:

i) di poterla suddividere in n parti uguali, in genere n è una potenza di 10, l'operazione richiede di mettere assieme n parti uguali (e posso fare il confronto per stabilirlo) e poi sommare le n grandezze (e lo posso fare) e questa somma confrontarla con l'unità U, posso dire che ciascuna parte è U/n;
ii) oppure posso considerare m volte l'unità U (con m in genere una potenza di 10) e sommarle ottenendo mU.

Nel primo caso ho i sottomultipli dell'unità, nel secondo i multipli.

Quando ho una grandezza incognita G, omogenea con U, posso confrontarle e stabilire se ad esempio $G > U$. Allora posso prendere il numero reale r (anche irrazionale considerando che userò un'approssimazione decimale opportuna come spiegato sopra e che vedremo anche dopo) espresso da $\frac{p}{n}$ in modo tale che $\frac{p}{n}U = G$ e quindi $\frac{p}{n}$ rappresenta la misura di G in unità U.

Vediamo questi passaggi con la lunghezza che è intimamente legata ai segmenti (lunghezza di un segmento). Infatti la definizione di lunghezza è solo per segmenti (cioè parti di rette), per archi o altre curve si opera l'operazione di rettificazione (cioè portare ad un segmento rettilineo, ad esempio con una cordicella che segue l'arco e poi viene stesa per essere rettilinea e misurata).
Scelgo l'unità (ad esempio il segmento di 1 cm), confronto n segmenti di 1 cm (il righello lungo almeno n cm) col il segmento da misurare (confronto vuol dire pongo lo zero del righello con il primo estremo del segmento, poi vado a vedere dove il secondo estremo cade nel righello).
Dal confronto conosco che il segmento ha una lunghezza compresa tra k volte U e $(k+1)$ volte U, ovvero $kU <$ segmento $< (k+1)U$. Poi posso migliorare la misura utilizzando il sottomultiplo del cm (il mm cioè $U/10$) e quindi aggiungo $d(\frac{U}{10})$ in modo che $kU + d(\frac{U}{10}) <$ segmento $< kU$ + $(d+1)(\frac{U}{10})$ quindi la misura fino a questo punto sarà $(k.d)$ U.
Ad esempio se $k = 2$ e $d = 3$, lunghezza segmento=2.3 cm in difetto e 2.4 cm in eccesso. Ovviamente posso andare avanti a prendere sottomultipli (centesimi, millesimi, etc.) finché la misura non è sufficientemente approssimata.

Come si vede l'operazione di misura fornisce sempre dei valori decimali che sono razionali ma andando avanti con sempre più cifre decimali ottengo l'opportuna approssimazione anche per grandezze con valori irrazionali in termini dell'unità di misura scelta.
Rimane il problema di dove fermarsi col numero di cifre decimali e questo verrà chiarito nel prossimo paragrafo.

3) **Scrittura di una grandezza e cifre significative**

Vediamo come si può scrivere correttamente il valore di una grandezza: dal procedimento di misura ho ottenuto un valore, numero reale, **questo valore deve essere seguito dall'unità**

di misura di un opportuno sistema di unità e nei prossimi paragrafi tratteremo il Sistema Internazionale.

- Per questioni di coerenza, se l'unità di misura non è nel Sistema Internazionale (che indicheremo anche con SI) occorre convertire il valore in modo opportuno.

Quindi se misuro una lunghezza $l = 2$ non è la scrittura corretta, $l = 2\ cm$ lo è perché la scrittura non è ambigua sull'unità di misura.
Misuro una pressione $p = 50\ Pa$, questa è una scrittura corretta.
Se trattassimo anche gli errori di misura, la scrittura corretta dovrebbe contenere l'errore di misura $p = (50 \pm 1)\ Pa$ che fornisce l'intervallo in cui il valore è conosciuto: in questo esempio il valore "vero" di p è compreso tra $49\ Pa$ (limite per difetto) e $51\ Pa$ (limite per eccesso).
Infatti l'operazione di misura fornisce un valore per difetto e uno per eccesso: la nostra conoscenza non è infinitamente precisa per varie ragioni (strumenti con precisione limitata, perturbazioni durante la misura, effetti intrinseci alla Natura) e quindi non avremo mai un intervallo di indeterminazione ridotto a zero (errore ±0): tale caso è possibile solo in ambito matematico.

Poiché nel corso tratteremo solo i valori e non gli errori di una grandezza, si potrebbe avere un approccio matematico e scrivere a piacere i numeri, ad esempio $2/3$, $\sqrt{2}$, π, 1.750034023. Questo modo di procedere però dimentica che la fisica si basa su grandezze misurate e quindi la precisione non è infinita, si introduce perciò la nozione di **cifre significative**, cioè le cifre con significato fisico in un una misura di grandezza.

Iniziamo a precisare che **le cifre significative non sono le cifre decimali** di un numero: infatti 2.35 ha 2 cifre decimali ma le cifre significative sono 3.

Proviamo a scrivere lo stesso numero in vari modi: $2.35 = 0.235 \times 10^1 = 235\ \times 10^{-2}$: è chiaro che il valore non cambia però risulta pure evidente che il primo ha 2 cifre decimali, la seconda scrittura presenta 3 cifre decimali, la terza non ha cifre decimali. Quindi un numero, moltiplicato per una potenza di dieci può avere un numero di cifre decimali qualunque, invece in tutti i casi il numero ha sempre 3 cifre significative.
Anche il numero di zeri attorno al numero può essere variabile a piacere: $2.35 = 0.00235\ \times 10^3 = 23500\ \times 10^{-4}$, in questo ultimo caso però il significato fisico è differente sebbene matematicamente ha lo stesso valore di 2.35.

Per capirlo vediamo il significato di precisione usando le lunghezze: se conosco una lunghezza di un muro esterno di una casa di circa $l = 20\ m$ con la precisione di un metro posso scrivere più correttamente $l = (20 \pm 1)\ m$ ma se la conosco con la precisione di 1 mm $l = (20 \pm 0.001)\ m$ e quindi sulla misura 20 l'errore va a incidere sulla terza cifra decimale e quindi la scrittura corretta è $l = (20.000 \pm 0.001)\ m$: scrivere 20 o 20.000 apparentemente è lo stesso valore (punto di vista matematico), in fisica non è uguale per quanto visto prima sugli intervalli di indeterminazione, questo a maggior ragione se non si scrivono errori di misura.

Se scrivo 20 questo valore presenta 2 cifre significative con le unità come cifra meno significativa e non avendone scritte altre vuol dire che l'indeterminazione incide sulle unità quindi implicitamente il numero scritto così indica che l'intervallo di indeterminazione è (almeno) da 19 a 21 (ovvero 20±1).
Nel secondo caso (20.000) le cifre significative sono 5 poiché l'intervallo di indeterminazione (da 19.999 a 20.001) modifica lo 0 dei millesimi su 5 cifre.

Da notare che l'errore potrebbe anche essere più grande di ± 1 sulla cifra meno significativa ma non comparendo esplicitamente non lo sappiamo e quindi usiamo il valore minimo.
Infatti 20.000 potrebbe essere seguito da ± 0.006 ma la scrittura sarebbe sempre 20.000.

Osserviamo anche che $l = (20.33 \pm 1)\ m$ è una scrittura errata senza senso: 33 cm aggiunti a 20 m vuol dire che pretendo di dare l'informazione con cifre significative fino ai cm mentre l'intervallo di indeterminazione è 1 m (errore di misura) ben superiore al cm, le cifre 33 non fanno parte delle cifre significative.

Ritornando a 2.35 è come se scrivessi che l'errore mi modifica il 5 (centesimi) ma lo stesso vale su 0.00235×10^{3} e su 235×10^{-2}, la cifra modificata è sempre il 5 con l'opportuno significato posizionale: quello che conta è che il 5 è nella posizione meno significativa di un numero di 3 cifre: numero con 3 cifre significative 235 con l'opportuna potenza di 10 e con la cifra più significativa diversa da zero (altrimenti non conterebbe come cifra più significativa, ovvero 0235 non ha 4 cifre significative ma solo 3).

Altri esempio: 1024 ha 4 cifre significative, 0.0320 ha tre cifre significative, 10.0250 ha 6 cifre significative.

Il problema delle cifre significative si pone in particolare con i risultati che fornisce una calcolatrice.

Partiamo da 2/3 che come frazione è un valore esatto, in rappresentazione decimale è $0.\overline{6}$ con 6 periodico. Se vogliamo scrivere 2/3 con 4 cifre significative devo avere 4 numeri (il più significativo diverso da zero) e quindi 0.6666666666…. diviene 0.6666**<u>6666</u>**….≈0.6666 però il primo numero che trascuro è 6 e quindi per ridurre l'impatto del **troncamento** si opera un **arrotondamento** ovvero se il primo numero successivo a quello meno significativo è compreso tra 0 e 4 si tronca senza fare nulla, se è invece compreso tra 5 e 9 si aumenta di 1 la cifra meno significativa 0.6666|6666….≈0.6667.
Notare anche il segno di uguale particolare ("a ondine") che durante il corso indicherà l'arrotondamento alle cifre significative richieste.

Se non ci sono abbastanza cifre si aggiungono zeri: se il numero è 235 e sappiamo che l'indeterminazione è sui centesimi, la scrittura è 235.00 che fornisce correttamente questa informazione.
In genere nella scuola si insegna che il numero irrazionale π vale 3.14 che è un numero con 3 cifre significative che approssima π=3.1415926…….. numero irrazionale che in rappresentazione decimale ha infinite cifre e non è periodico (altrimenti sarebbe un numero razionale); se invece lo volessimo con 5 cifre significative π≈3.1416.

Nei problemi di fisica i risultati devono essere scritti limitando opportunamente le cifre significative anche se la calcolatrice ne fornisce molte. Questo è motivato dal fatto che:
a) i dati di partenza hanno cifre significative limitate e i risultati non possono migliorare la loro precisione
b) per una richiesta esplicita nel testo.

Senza entrare nelle formule di propagazione degli errori e in mancanza di informazioni si può utilizzare una semplice regola: se i dati hanno **al minimo** N cifre significative, i risultati non possono essere **scritti con più di N cifre significative**.

Ovviamente il testo del problema potrebbe direttamente richiedere un numero di cifre significative e quindi i risultati finali dovranno essere arrotondati a quanto richiesto.

Questo non vuol dire che tutti i valori, anche quelli intermedi, siano da arrotondare anzi, proprio per evitare di perdere in precisione è necessario che i **calcoli intermedi vadano eseguiti con qualche cifra significativa in più** rispetto a quelle richieste sui valori finali.
Ad esempio se tutti i calcoli sono fatti dalla calcolatrice questo è assicurato dalla sua rappresentazione con molte cifre memorizzata internamente, se invece i valori intermedi sono di volta in volta immessi da tastiera è necessario considerare almeno una o due cifre significative in più rispetto a quelle richieste per i risultati finali.

Terminiamo con una nota sui calcoli effettuati da una calcolatrice o un computer, infatti la maggior parte dei calcoli è approssimata e lo si può vedere effettuando alcune semplici operazioni.

Se ripetiamo più volte una operazione e la sua inversa vedremo che il risultato non è **esattamente** quello voluto: eseguiamo la radice quadrata sulla calcolatrice di un computer Windows 10 64 bit

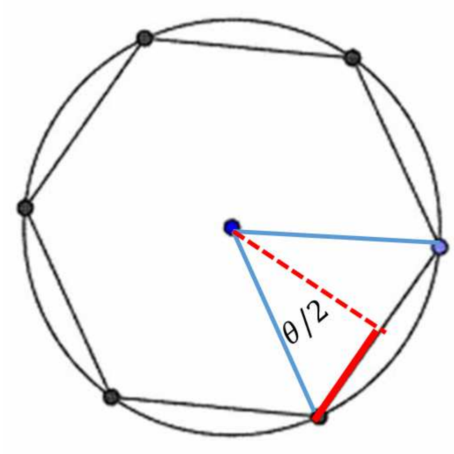
a) $\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242097$ poi eseguiamo il quadrato $= 2$ e sottraiamo 2, il risultato dovrebbe essere zero invece $(\sqrt{2})^2 - 2 = 1.1578739678741186722221088213213e - 37$ (lasciamo la notazione informatica in cui l'esponente della potenza di 10 viene scritta preceduta da "e") che sebbene sia molto piccolo rispetto a 1, non è zero.
b) Ripetiamo 3 volte le operazioni di funzione e inversa sempre su $\sqrt{2}$ prima di sottrarre 2 con risultato $\left(\sqrt{\left(\sqrt{(\sqrt{2})^2}\right)^2}\right)^2 - 2 = 1.5366917358084525395524152099525e - 37$.
c) Eseguiamo $\ln(e^2)$ e poi togliamo 2 ottenendo come risultato $\ln(e^2) - 2 =$ 4.2689630275598549039289857602 6e-42 invece di zero.
d) Eseguiamo $\ln(e^{300}) - 300 = 1.8771923489970265157887757271638e - 36$ mentre se calcoliamo $e^{\ln(300)} - 300 = 2.2588419010428080315920312501848e - 35$. Questa operazione potrebbe mandare in *overflow* una calcolatrice (ovvero oltre la capacità di rappresentare numeri grandi in modulo), se ciò avviene abbassare il numero 300.

Su un computer a 32 bit, oltre ad avere maggiori problemi di *overflow,* è possibile che le differenze siano maggiori ma anche le cifre mostrate saranno in numero inferiore.
Questo vuol dire che la calcolatrice mostra un certo numero di cifre (le cifre significative) ma memorizza più cifre di quelle mostrate, come è stato consigliato prima.

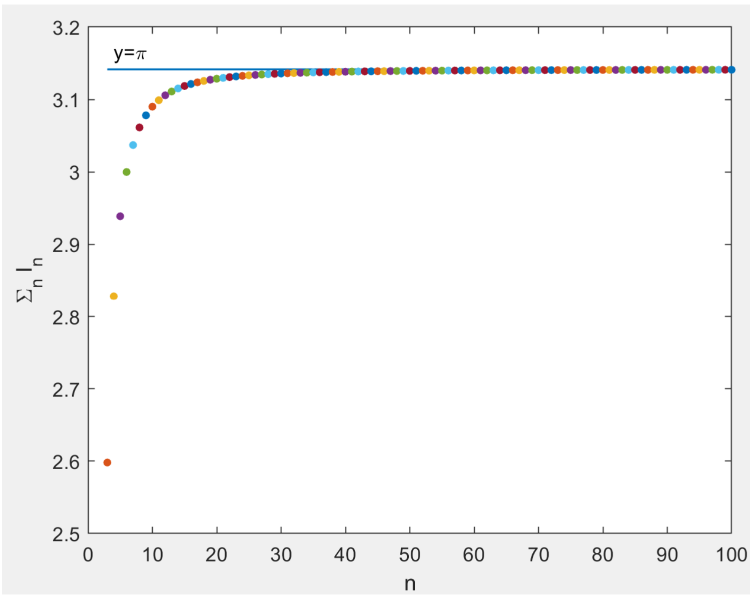
Aree e volumi
Concludiamo ricordando alcune espressioni di aree e volumi studiati nelle superiori che saranno utilizzate nel corso:
Area di un quadrato di lato l: $A = l^2$
Area di un rettangolo di lati a, b: $A = ab$
Area di un parallelogramma di base b e altezza h: $A = bh$
Area di un cerchio di raggio r: $A = \pi r^2$
Superficie laterale di un cilindro retto di raggio r e altezza h: $S_l = 2\pi r h$
Superficie di una sfera di raggio r: $S = 4\pi r^2$

Volume di un cubo di spigolo l: $V = l^3$
Volume di un cilindro retto di raggio r e altezza h: $V = \pi r^2 h$
Volume di una sfera di raggio r: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Appendice



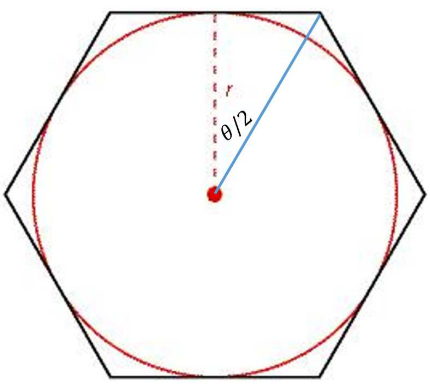
Vediamo un'applicazione delle conoscenze acquisite per calcolare il limite$\sum_1^n l_n \to \int_{circonferenza} dl$ per $n \to \infty$ che ci fornisce la lunghezza della circonferenza.
Ciascun poligono inscritto di n lati può essere diviso in triangoli isosceli uguali (i due lati blu dal centro sono raggi di lunghezza r) con un angolo al centro $\theta = \frac{2\pi}{n}$. L'altezza del triangolo (segmento tratteggiato rosso) è anche bisettrice e quindi il triangolo coi lati rossi (metà del triangolo con i lati blu) ha il lato rosso metà del lato L del poligono inscritto.
Questo triangolo è rettangolo e quindi la lunghezza del lato rosso $l_{rosso} = r\ \sin(\frac{\theta}{2}) \to l_n = 2l_{rosso} = 2r\sin(\frac{\theta}{2})$ ed il perimetro vale $2p = \sum_1^n l_n = nl_n = 2nr\sin(\frac{\pi}{n})$.



Aumentando n, l'angolo diventa sempre più piccolo e quindi tende a zero ma il seno viene moltiplicato per n.
Se proviamo a fare un calcolo esplicito $3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2.598\ldots\ldots$, $4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.828\ldots\ldots$, $5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2.938\ldots\ldots$, come si vede il numero aumenta, $100\sin\left(\frac{\pi}{100}\right) = 3.141\ldots\ldots$, $100\sin\left(\frac{\pi}{100}\right) = 3.1415926\ldots.$ e tende a π come mostrato nella figura a fianco da cui $\sum_1^n l_n = 2nr\ \sin(\frac{\pi}{n}) \to 2\pi r$.

Questo risultato lo si può anche dimostrare utilizzando le proprietà del seno per angoli piccoli $2nr\ \sin(\frac{\pi}{n}) \cong 2nr\ \frac{\pi}{n} = 2\pi r$. L'approssimazione diventa tanto migliore quanto più piccolo è l'angolo (cioè per n grande), il risultato diventa esatto per $n \to \infty$.

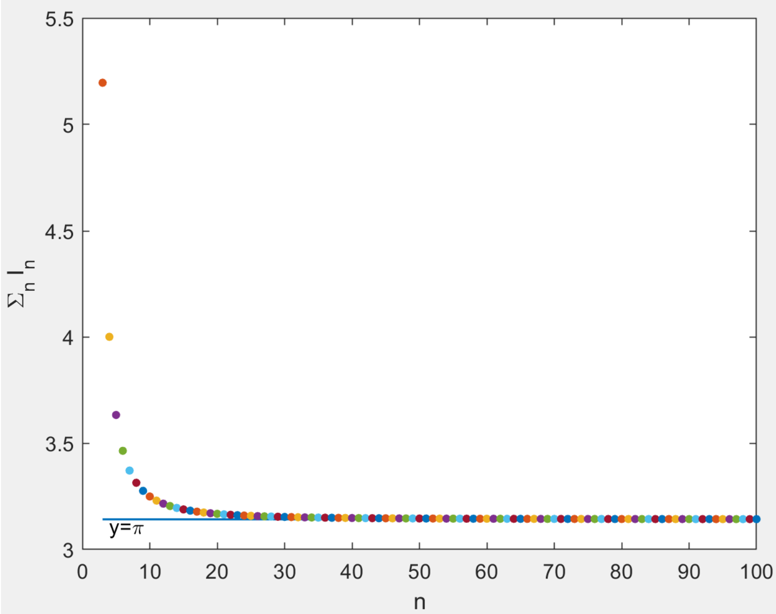
Se si considera un poligono circoscritto, dal triangolo rettangolo di altezza (tratteggiata) r, la lunghezza del lato vale $l_n = 2r\ tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2r\ tg(\frac{\pi}{n})$ da cui il perimetro vale $2p = nl_n = 2\ n\ r\ tg(\frac{\pi}{n})$.



In questo caso il perimetro approssima per eccesso la lunghezza della circonferenza.

Proviamo a calcolare esplicitamente alcuni termini: $3\ tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5.196\ldots$, $4\ tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$, $5\ tg\left(\frac{\pi}{5}\right) = 3.632\ldots$, il valore sta diminuendo, $100\ tg\left(\frac{\pi}{100}\right) = 3.1426\ldots$ e come si vede questa successione all'aumentare del numero di lati tende a π da cui $\sum_1^n l_n = 2nr\ \mathrm{tg}(\frac{\pi}{n}) \to 2\pi r$.

Nella figura a fianco è mostrato questo andamento che rispetto a prima approssima per eccesso il valore di π.



Anche questo risultato si può dimostrare utilizzando le proprietà della tangente per angoli piccoli $2nr\ \mathrm{tg}(\frac{\pi}{n}) \cong 2nr\ \frac{\pi}{n} = 2\pi r$, tale relazione diventa esatta per $n \to \infty$.

Approssimazione delle funzioni e funzione esponenziale

Abbiamo introdotto la funzione $y = e^x$ e la sua proprietà è che $\frac{dy}{dx} = e^x$.

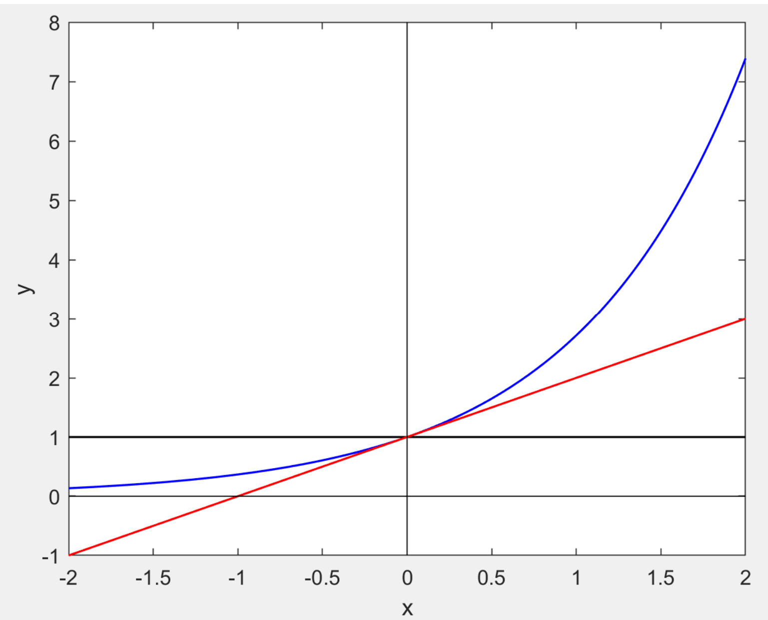
Anche se nel corso di Analisi Matematica verranno introdotti e sviluppati tali concetti, diamo qui un cenno all'approssimazione di funzioni tramite polinomi.

Infatti le funzioni tipo e^x, $\sin x$ e $\cos x$ non sono polinomiali ma si possono approssimare con polinomi e questo rende possibile il loro calcolo esplicito.

La funzione più semplice da trattare per verificare questo è la funzione esponenziale basandoci proprio sulla sua proprietà.

L'unico punto di cui conosciamo esattamente il valore è $y(0) = e^0 = 1$.

Quindi la retta $y_0 = 1$ (curva nera) approssima per un certo intervallo la funzione e^x (curva blu).



Per migliorare questa approssimazione possiamo utilizzare la retta tangente, ovvero la retta che ha la stessa pendenza in $x = 0$, cioè la retta $y_1 = 1 + x$ che ha pendenza $\frac{dy_1}{dx} = 1$ e che passa per il punto (0,1) (curva rossa).

Finora abbiamo richiesto che il polinomio abbia lo stesso valore e la stessa pendenza (derivata prima). Possiamo proseguire e richiedere che il polinomio abbia la stessa derivata seconda $\frac{d^2}{dx^2}e^x = e^x$

ovviamente nell'unico punto che sappiamo calcolare esattamente $x = 0$ ovvero $y_2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ ($\frac{dy_2}{dx} = 1 + x$ e $\frac{d^2}{dx^2}y_2 = 1$).
Questo meccanismo può essere esteso a qualunque ordine di derivata:

$3 \rightarrow y_3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot3}x^3 \rightarrow \frac{dy_3}{dx} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \rightarrow \frac{d^2y_3}{dx^2} = 1 + x \rightarrow \frac{d^3y_3}{dx^3} = 1$

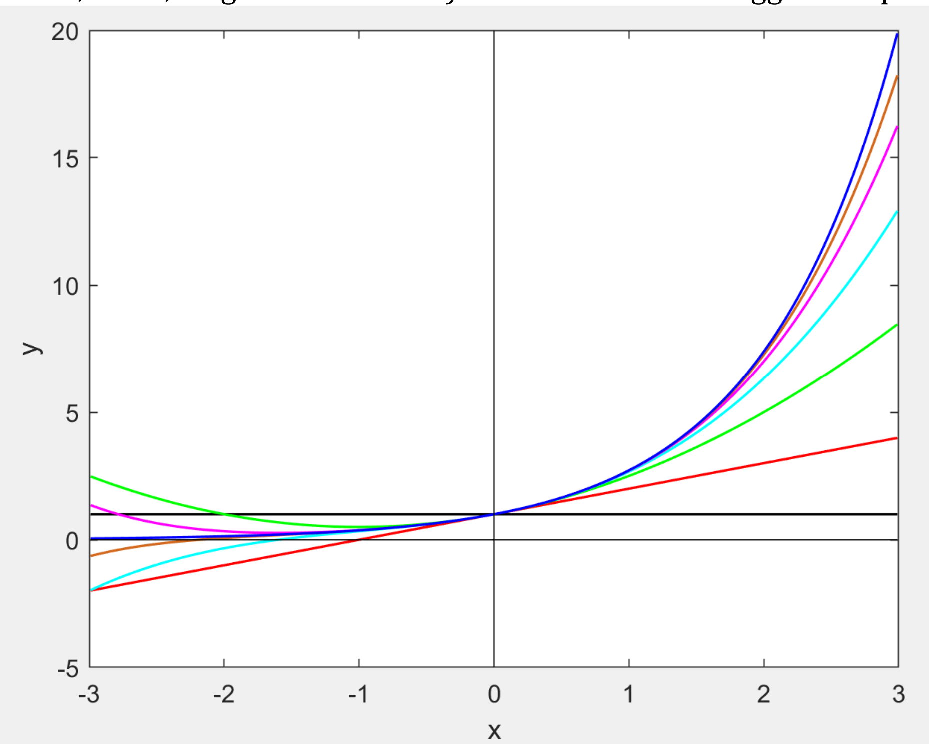
$4 \rightarrow y_4 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot3}x^3 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}x^4 \rightarrow \frac{dy_4}{dx} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot3}x^3 = y_3 \rightarrow \frac{d^2y_4}{dx^2} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 = y_2 \rightarrow \frac{d^3y_3}{dx^3} = 1 + x = y_1 \rightarrow \frac{d^4y_3}{dx^4} = 1 = y_0$

…….

…….

$n \rightarrow y_n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot3}x^3 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}x^4 \ldots\ldots + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdots(n-1)}x^{(n-1)} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdots n}x^n$

è evidente che più termini consideriamo meglio si approssima l'esponenziale su un intervallo via via più grande (in figura sono mostrate le curve per n da zero fino a 5 (curva nera, rossa, verde, ciano, magenta e marrone) su un intervallo x maggiore rispetto alla precedente figura).



Inoltre le derivate generano i polinomi precedenti ($\frac{dy_n}{dx} = y_{(n-1)}$).
Se considerassimo il limite $n \rightarrow \infty$, derivare un "polinomio" con infiniti termini si riottiene ancora un "polinomio" identico (in tal caso la somma di infiniti termini si chiama **serie**) perché per $n \rightarrow \infty$, n ed $n-1$ indicano la stessa cosa e quindi $\frac{dy_n}{dx} = y_n$ con $n \rightarrow \infty$.
A parte il fatto matematico, questa somma di termini con esponente differente ha delle implicazioni fisiche molto importanti: infatti **tutti i termini devono essere omogenei** per essere sommati e questo verrà discusso quando parleremo delle grandezze derivate e delle loro dimensioni.