4 METODO SPERIMENTALE

Premessa:

La materia "*fisica*" (dal greco "natura", ovvero "le cose naturali") come noi oggi la studiamo compare dopo **Galileo Galilei** (1564 –1642). Prima faceva parte della "filosofia dalla natura" perché come cercava di dare risposte ai quesiti legati all'evoluzione del mondo che ci circonda (filosofi greci Democrito (460 a.C.–370 a.C.), Platone (428 a.C.–348 a.C.), Aristotele (384 a.C.-322 a.C.)). Tale indagine era però di tipo **qualitativo.**

Da questo approccio si discosterà la **scienza moderna** che partendo da Galileo si basa su un approccio **quantitativo**: non basta osservare il mondo e solo mediante ragionamenti lo si comprende. Infatti i ragionamenti possono essere personali, legati ad opinioni e non oggettivi, occorre costruire un impianto della scienza che sia **oggettivo**. Da qui la necessità di fare esperimenti, in condizioni controllate, che semplifichino le condizioni e che portino a definire **grandezze fisiche** e relazioni fra loro → **leggi fisiche**.

Le **grandezze fisiche** sono **definite in modo operativo** con una operazione (**misura**) che ne fornisce anche il valore. Tale procedimento fa sì che tutti coloro che **ripetano l'esperimento** siano **concordi sui risultati** finali dati dalle leggi (il risultato non è una opinione).

Questo non vuol dire che le leggi fisiche sono immutabili, ma che le conoscenze fino a quel momento accumulate (cioè che i fenomeni osservati) non contraddicono le previsioni di quelle leggi: se c'è una **contraddizione**, le leggi vanno modificate o sostituite da altre più generali.

Noi ci occuperemo della Fisica Classica che sebbene soppiantata dalla Fisica Quantistica e Relativistica ha piena validità per i fenomeni fisici che avvengono tra corpi di dimensioni molto maggiori di quelle atomiche e per velocità molto inferiori rispetto alla velocità della luce.

Osserviamo che alcune leggi possono essere portate ad essere il fondamento di altre (quindi sono leggi più generali) e si chiamano anche **principi**: partendo dai principi (leggi fondamentali) si generano tutte le altre leggi dei fenomeni particolari.

I tre principi della Meccanica (**principio di inerzia, principio di Newton e principio di azione e reazione, a volte detti genericamente 3 leggi di Newton**) permettono di dimostrare altre leggi che si applicano ai casi particolari come il moto dei pianeti, il moto delle automobili, il moto dei fluidi.

Una teoria fisica si basa sui principi (in un parallelo con la matematica i principi sarebbero come gli assiomi della teoria, la differenza è che sono generalizzazioni di leggi fisiche portate all'essenziale ma pur sempre basate sull'osservazione e sull'esperienza) e questa teoria genera un **modello** della realtà, ovvero una versione semplificata della realtà che permette una formalizzazione matematica capace di spiegarne il funzionamento (ciò che trascuriamo/eliminiamo non aggiunge nulla al fenomeno ma introduce delle complicazioni) [1].

[1] Qui si pone il problema se il modello fornisce i risultati della realtà. Se l'approssimazione della realtà è sufficiente agli scopi il modello è accettabile, nel caso contrario abbiamo buttato via troppo e il modello può essere reso sempre più complicato aggiungendo effetti trascurati nel modello semplificato precedente. In questa gerarchia di modelli, si arriva al modello la cui complessità è sufficiente a spiegare la realtà. Se, anche aggiungendo tutto quello che posso dentro la teoria fisica che uso, non riesco ad approssimare la realtà allora la teoria è incompleta e come detto prima si devono cambiare i principi (leggi fondamentali) su cui si basa.

Il successo di tale visione si vede nelle applicazioni tecnologiche (dai telefonini, ai computer, laser, trasmissioni in fibra ottica, automobili, aerei, missioni spaziali, ecografie, radiografie, …)

Metodo sperimentale:

Tutto è basato sul "***metodo sperimentale"*** o ***"metodo scientifico***" che consiste in una procedura che segue alcune fasi che possono essere schematizzate con

a) l'***osservazione*** di un fenomeno, ovvero vedere cosa succede trovando le grandezze fisiche essenziali coinvolte nel fenomeno (saranno i parametri dell'esperimento)
b) l'***esperimento***, cioè la ripetizione in condizioni controllate dello stesso fenomeno eliminando ciò che non è essenziale al fenomeno e modificando i parametri dell'esperimento per osservare/controllare l'evoluzione del fenomeno in diverse condizioni
c) la ***misura*** definire un procedimento oggettivo che porti a numeri che esprimono la grandezza dei parametri che intervengono nel fenomeno (parte quantitativa).

In tal modo si ottengono tabelle di numeri: conosco da dove parto (valori dei parametri) → osservo dove arrivo (la grandezza F che definisce il fenomeno arriva a valori diversi).
In questo modo sto generando una relazione tra parametri e F ovvero una relazione matematica che sarà poi la legge fisica.

Il primo passo del *metodo sperimentale* è l'osservazione di ciò che avviene intorno a noi ma fare un'*osservazione* non significa semplicemente guardare gli eventi ma si deve provare ad analizzarli in maniera critica in modo poi da riprodurli in condizioni controllate (*esperimento*) per individuare i parametri fondamentali che intervengono nel fenomeno in esame.

In queste fasi si possono utilizzare **strumenti di misura** e di osservazione che permettono di fare **analisi oggettive** (*misura*).

Grandezze fisiche

A seguito dell'applicazione del metodo sperimentale, come introdotto nella Premessa, tutte le **grandezze fisiche** sono **definite in modo operativo** con una operazione di **misura** ossia c'è un procedimento che tutti devono seguire scrupolosamente se vogliono ottenere il valore.

Ad esempio la lunghezza tra 2 punti AB è la distanza in linea retta che misuro con un righello ponendo lo zero del righello al primo punto A e vedendo dove cade sulla scala graduata del righello il secondo punto B, tutti noi seguiamo esattamente questo procedimento per misurare una lunghezza. Questo procedimento associa univocamente il numero alla lunghezza (a parte gli errori di misura che non tratteremo esplicitamente nel corso e di cui abbiamo parlato per le grandezze omogenee e cifre significative). L'uso di uno strumento tarato (nell'esempio della lunghezza il righello) è quindi implicito nella misura. Altri esempi sono gli orologi per la misura del tempo, il tachimetro per la velocita.

Avendo introdotto un procedimento univoco per ogni grandezza queste sono automaticamente **grandezze omogenee**:

- posso confrontarne i valori stabilendo se sono >, < o =,
- posso sommarle algebricamente (+ o -))

queste corrisponde al detto che posso solo “sommare mele con mele ma non posso sommare mele e pere”. In tal modo posso definire **una unità di misura** a cui fare riferimento.

L’esperienza del passato ci ha portato a definire opportune unità che chiaramente devono essere internazionalmente accettate anche per permettere gli scambi commerciali (le unità tra i vari Paesi devono essere le stesse: se vendo un chilogrammo di acciaio alla Svizzera, chi lo riceve deve ricevere un chilogrammo con lo stesso significato).

L’accumulo di esperienze ha permesso di individuare internazionalmente **sette grandezze fisiche** dette ***fondamentali*** in termini delle quali si possono esprimere tutte le altre grandezze che sono dette ***derivate***, strettamente legata alle proprietà dei sistemi e al fatto che l’evoluzione di un sistema si svolge nello spazio e nel tempo. Le grandezze derivate si ottengono da quelle fondamentali mediante definizioni e leggi fisiche[2].

Le ***sette grandezze fondamentali*** del Sistema Internazionale (SI) sono**:** ***massa*****,** ***lunghezza*****,** ***tempo*****,** ***corrente elettrica*****,** ***temperatura*** **(*****termodinamica*****),** ***mole*** **e** ***candela***.

Le 7 grandezze fondamentali e in parentesi le unità di misura per esteso ed abbreviate, è stato indicato anche l’ambito in cui verranno utilizzate durante il corso

- Massa (*chilogrammo: kg*); Meccanica
- Lunghezza (*metro: m*); Meccanica
- Tempo (*secondo: s*); Meccanica
- Quantità di materia (*mole: mole*)
- Temperatura (kelvin: K)
- Corrente elettrica (*ampere: A*); Elettromagnetismo
- Intensità luminosa (*candela: cd*)

A queste sette si aggiungono 2 grandezze ausiliarie per la misura di angoli:

- angolo piano in **radianti** (*rad*)
- angolo solido in **steradianti** (*sr*)).

I nomi delle unità sono scritte <u>sempre minuscole</u> se per intero (esempio newton), se abbreviate sono maiuscole quelle che si riferiscono a nome di persona (esempio N per newton, in onore di Isaac Newton).

ESEMPI di grandezze derivate espresse in termini delle 7 fondamentali

- Forza: kg*m/s^2 (a questa grandezza derivata è stata data una unità newton: N)
- Energia, Lavoro, Calore: (kg*m/s^2)*m ;   (joule J = N*m)

---

[2] la differenza tra definizioni e leggi fisiche è sottile e si può dire che sono tutte leggi fisiche: le definizioni semplificano le notazioni nelle formule delle leggi fisiche o perché si vuol dare particolare importanza ad una grandezza derivata. Per esempio: la velocità di un corpo che si muove è definita <u>elementarmente</u> partendo da lunghezza percorsa, l, e il tempo, t, di percorrenza della lunghezza, questi vengono divisi ottenendo $\bar{v} = \frac{l}{t}$ (velocità media) e con procedimento di limite si arriva alla velocità (istantanea) v che come si vede dipende da altre grandezze (l e t) e quindi la definizione è di per sé una legge fisica, d’altra parte è più facile nelle formule scrivere direttamente v; la pressione è la forza per unità di superficie $p = \frac{F}{S}$, nelle formule che riguardano i fluidi sarebbe molto scomodo usare sempre $\frac{F}{S}$ anziché p che rappresenta la grandezza naturale per lo studio di quei fenomeni.

- Carica elettrica: A*s; (coulomb C)

Grandezza derivate e analisi dimensionale

Limitandoci alle grandezze meccaniche (ma quanto segue vale per qualunque ambito) possiamo indicare la lunghezza con L, il tempo con T e la massa con M.
Una legge fisica lega le grandezze, in particolare quelle fondamentali per ottenere quelle derivate e quindi si può dire che **una grandezza derivata contiene quelle fondamentali** $L.T, M$.
Si può definire un'operazione che permette di trovare le grandezza fondamentali contenute in una grandezza derivata G e si indica con $[G]$, cioè mettere **tra parentesi quadre una grandezza vuol dire fare l'operazione di estrarre il contenute di grandezze fondamentali**.

L'operazione di estrarre il contenuto di grandezze fondamentali tramite [ ] definisce **l'analisi dimensionale.**

Per vedere come funziona, consideriamo la definizione di velocità nella <u>versione semplificata</u> $v = \frac{l}{t}$ come rapporto del cammino percorso diviso il tempo necessario a percorrere il cammino.
Il cammino è essenzialmente la misura di una lunghezza e quindi la grandezza fondamentale L. Il tempo impiegato è un'altra grandezza fondamentale T. Se opero con le parentesi quadre sulla grandezza $[l] = L$, se uso il tempo impiegato $[t] = T$.
Se ora opero sulla velocità prima definita $[v] = \left[\frac{l}{t}\right] = \frac{[l]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1}$, questo risultato indica che la grandezza contiene le 2 grandezze fondamentali Le T ed il tempo alla potenza -1 ma non contiene la massa e per completezza potrei scrivere $[v] = L^1T^{-1}M^0$.

Questa scrittura vuol dire che **dimensionalmente** v contiene L alla prima potenza e quindi se si raddoppia il percorso anche v raddoppia (direttamente proporzionali), contiene T alla potenza -1 (inverso o reciproco del tempo) quindi se il tempo raddoppia v si dimezza (inversamente proporzionali), mentre non contiene M e quindi posso nel processo fisico raddoppiare la massa e v non viene modificata.

Osserviamo che questa operazione non ha direttamente a che fare con le unità di misura, ci dice il contenuto delle grandezze fondamentali in v. Se per L assumiamo che le sue unità siano metri, per T siano secondi e per M chilogrammi (cioè siamo nel SI) allora dall'analisi dimensionale discende che le unità di misura di v siano $[v] = L^1T^{-1}M^0 \rightarrow m^1s^{-1}kg^0 = m/s$.
Se però usiamo per le lunghezze km e per i tempi h (ore) $[v] = L^1T^{-1}M^0 \rightarrow km^1h^{-1}kg^0 = km/h$.

Le **dimensioni** della grandezza sono sempre le stesse, ovvero contiene L alla prima potenza, contiene T all'inverso, ma le unità di misura sono differenti se scelgo altre unità. Questo dipende anche da che grandezze vengono assunte come fondamentali, se le cambio il contenuto nelle nuove grandezze fondamentali ovviamente cambia.

Dal punto di vista operativo l'analisi dimensionale richiede la conoscenza della legge fisica e quindi l'espressione matematica che fornisce la grandezza espressa in termini di quelle fondamentali e poi si opera tenendo conto che

- La somma di grandezze $[F + G] = [F]$ oppure $[F + G] = [G]$ perché sono omogenee.

- Il prodotto per un fattore numerico (adimensionale, vedi dopo) non cambia le dimensioni $[aG] = [G]$
- un prodotto si spezza nel prodotto delle dimensioni $[FG] = [F][G]$.
- il rapporto $\frac{G}{F}$ si spezza nell'analisi dimensionale del numeratore e del denominatore $\left[\frac{G}{F}\right] = \frac{[G]}{[F]}$.
- elevamento a potenza $[a^n] = [a]^n$ (in effetti è n volte il prodotto della stessa quantità).

Esempi: la lunghezza della circonferenza $l = 2\pi R \rightarrow [l] = [2\pi R] = [R] = L$ quindi le due grandezze contengono le stesse grandezze fondamentali, sono entrambe lunghezze, i valori numerici non aggiungono dimensioni.

L'area di un quadrato $A = l^2 \rightarrow [A] = [l^2] = [l]^2 = L^2$, l'area di un cerchio $S = \pi R^2 \rightarrow [S] = [\pi R^2] = [\pi][R^2] = [R^2] = L^2$ da cui ricaviamo che Ae S sono grandezze omogenee: tutte le aree contengono la lunghezza al quadrato.

In questo esempio utilizzeremo delle espressioni che verranno definite più avanti nel corso, per ora le prendiamo per buone. La pressione è definita come $p = \frac{F}{S}$, prendiamo come superficie quella di un cerchio $S = \pi R^2$ e la forza è data dalla legge di Newton $F = ma$ (ci sono dei vettori ma usiamo i moduli, **per l'analisi dimensionale il carattere vettoriale non importa**) quindi possiamo scrivere $p = \frac{ma}{\pi R^2}$, la massa e il raggio hanno le dimensioni di due grandezza fondamentali ma bisogna esprimere l'accelerazione $a \sim \frac{\Delta v}{\Delta t}$(nel limite si conservano le dimensioni) $\rightarrow [a] = \left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\right]$ma $[\Delta v] = [v_f - v_i] = [v] = LT^{-1}$ dimensioni di una velocità, analogamente per $[\Delta t] = [t] = T$ da cui $[a] = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$.
Con questo risultato $[p] = \left[\frac{ma}{\pi R^2}\right] = \frac{[m][a]}{[\pi][R^2]} = \frac{M\,LT^{-2}}{L^2} = M^1L^{-1}T^{-2}$, le unità di misura sarebbero $kg/(ms^2) = Pa$ anche se solitamente si parte dalla definizione iniziale $\frac{N}{m^2} = Pa$.

Esistono delle grandezze che non contengono le grandezze fondamentali che sono le grandezze **adimensionali** a cui corrispondono valori senza unità di misura, con le uniche eccezioni per gli angoli che nonostante siano adimensionali si definisce l'unità di misura [3].

Osserviamo che quantità adimensionali hanno lo stesso valore anche cambiando il sistema di unità utilizzato. Questo è ad esempio utile in fluidodinamica in cui si definiscono quantità adimensionali facendo analisi dimensionali e combinando grandezze che descrivono il moto.
Esempio: il valore della costante numerica π non cambia in tutti i sistemi di unità.

Tra le funzioni menzionate nell'introduzione, esponenziale, seno, coseno, tangente, logaritmo richiedono che l'argomento sia una quantità adimensionale e il loro risultato è una quantità adimensionale. Infatti esse sono rappresentate da una somma infinita di termini di potenze (funzioni trascendenti come mostrato nell'introduzione) che non permettono di essere sommati (non omogenei) se non fossero adimensionali ed il risultato è perciò adimensionale.

[3] Infatti gli angoli piani sono il rapporto fra la lunghezza dell'arco di circonferenza che sottende l'angolo e il raggio della circonferenza. Stessa cosa per gli angoli solidi: rapporto fra l'area della calotta sferica che sottende l'angolo solido e il raggio al quadrato della sfera.

Questo vuol dire che e^t (con t il tempo) non ha senso e deve essere scritto correttamente e^{kt} con $[kt] = 1$ e quindi $[k] = \frac{1}{[t]} = 1/T$.

Le unità di alcune grandezze che si adoperano quotidianamente **non sono del SI**:
- forse quella più usata è il peso in chilogrammi, i chilogrammi forza (kg o più correttamente kg_f) anziché in newton (N),
- la velocità in km/h
- la pressione in bar o atmosfere (Atm) anziché in pascal (Pa),
- le misure di volume in litri (l) anziché metri cubi m^3,
- le misure di temperatura in gradi Celsius (centigradi) °C anziché kelvin (K) (hanno però hanno gli stessi intervalli solo lo zero è spostato 0°C=273K e 100°C=373K)
- le misure di angoli in gradi (°) (grado sessagesimale suddiviso in 60 primi (‘) e un primo diviso in 60 secondi (’’), con la complicazione che le frazioni decimali di grado, es. 10.54°, richiedono la conversione in primi e secondi, ovvero 10° con parte decimale 0.54*60=32.4’ con parte decimale 0.4*60=24” da cui 10°32’24”) anziché radianti (*rad*, in realtà è adimensionale e quindi il valore è un numero puro però per riconoscerlo come valore associato ad un angolo si usa l’unità di misura).

Osservazione: utilizzare unità del solo Sistema Internazionale vuol dire utilizzare unità tra loro **coerenti**. Ovvero i valori da mettere nelle varie leggi fisiche portano a dei risultati **con valori numerici (risultati) che sono quelli corretti**.
Mescolare tra loro unità di sistemi diversi porta a valori finali non corretti, le formule scritte non sono più valide ma dovrebbero tenerne conto.
Sembra banale ma questo errore “da studenti” è capitato alcune volte con risultati disastrosi e dal costo elevato.
Quindi è sempre bene, dati in valori in un problema, **convertire tutti i valori in unità del S.I.** prima di procedere a qualunque calcolo.

<u>Multipli e sottomultipli:</u> A volte è comodo scrivere i valori molto piccoli o molto grandi senza troppi zeri (ad esempio 1 milione di kg=1000000 kg) utilizzando i multipli (moltiplicano l’unità di misura in genere per fattori mille=$1000 = 10^3$) e sottomultipli (dividono l’unità in genere per fattori mille=$1/1000 = 10^{-3}$).

I multipli sono in genere scritti con lettere maiuscole tranne il primo e i più comuni sono

chilo (mille)	k	10^3
Mega (milione)	M	10^6
Giga (miliardo)	G	10^9
Tera (1000 miliardi)	T	10^{12}
Peta (1000 Tera)	P	10^{15}

Quindi 1 milione di kg=1000000 kg=1 milione di 1000 g=1000000000 g=1 miliardo di g=1Gg: infatti non si scrive 1 Mkg perché ci sarebbero 2 multipli, questo perché il chilogrammo unità fondamentale del SI è già il multiplo del grammo che nel SI non è più unità della grandezza fondamentale, ma per ragioni storiche non si è voluto chiamare differentemente il kg.
Alcuni esempi: la rete WiFi funziona a 2.4 GHz dove hertz (Hz) è la grandezza derivata di oscillazioni al secondo. Per i gigabyte e i terabyte le cose sono meno semplici perché si usano potenze di 2 anche se la logica è simile: il byte è un gruppo di 8 unità binarie ($8 = 2^3$) quindi un gigabyte è 1 miliardo di byte e un terabyte sono mille miliardi di byte.

I sottomultipli sono scritti con lettere minuscole e i più comuni sono

milli (1/mille)	m	10^{-3}
micro (1/milione)	μ	10^{-6}
nano (1/miliardo)	n	10^{-9}
pico (1/1000 miliardi)	p	10^{-12}
femto (1/1000 di pico)	f	10^{-15}

Stiamo vivendo nel periodo delle nanotecnologie quindi la tecnologia si occupa di oggetti di un miliardesimo di metro (1nm=$10^{-9}\,m$) o più precisamente che ha dimensioni tra 1 e 100 nm.
L'introduzione dei multipli e sottomultipli pone il problema delle equivalenze passando da un multiplo/sottomultiplo ad un altro.
Questo si risolve molto facilmente sostituendo alla lettera il suo valore in potenze di 10: per esempio, indicando con X_p la potenza, passare da 1Mm ai mm corrisponde $1\ 10^6$ m = $X_p 10^{-3}$ m semplificando le unità m, $10^6 = X_p\ 10^{-3}$ da cui $X_p=10^9$ →1Mm = 1 000 000 000 mm, 2.36 Mm= 2.36 10^9 mm.
L'utilizzo di unità non SI come l'ora (h) porta a definire le velocità in km/h: il passaggio a unità SI si effettua pensando di esprimere l'unità di partenza con quella SI (1h=3600s e, anche se multiplo del m, km=1000m) e operando poi sul rapporto km/h=1000m/3600 s=(1/3.6) m/s quindi occorre dividere il valore in km/h per 3.6 per ottenere la velocità in m/s.

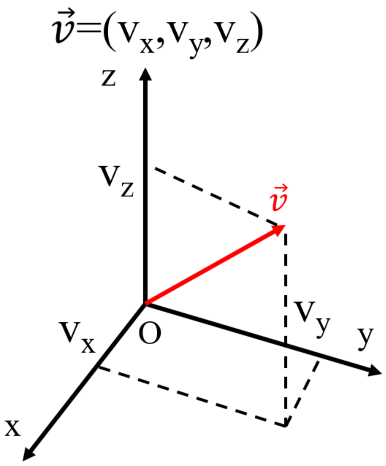
Tipologia delle grandezze fisiche

La descrizione dei fenomeni fisici è basata su grandezze fisiche e finora abbiamo assunto che queste possano essere definite univocamente dal solo valore.
Prendiamo la lunghezza che sappiamo essere quella di un segmento (segmento dato): sapere la lunghezza definisce univocamente il segmento?
La risposta è in generale no. Tutti i segmenti con quella lunghezza sono rappresentati anche se non hanno nessun'altra caratteristica comune.
Si pensi ad una circonferenza (luogo dei punti equidistanti da un centro): tutti i raggi di questa circonferenza si dirigono dal centro alla circonferenza con tutte le possibili angolazioni, come faccio a definire uno solo di questi segmenti (raggi)? Poi stiamo parlando della distanza dal centro alla circonferenza o dalla circonferenza al centro? Quindi anche il semplice segmento geometrico va **orientato** ovvero bisogna sapere da dove parte e dove arriva, quindi può essere rappresentato da una freccia che ci fornisce appunto l'**orientazione**.
Da quanto detto, è chiaro che la posizione di oggetti, nonostante sia concettualmente legato alla distanza da un certo punto (e quindi una misura di lunghezza ad esempio da dove mi sto trovando adesso all'oggetto) non può esaurirsi con il solo numero pari alla lunghezza.

Questo porta alla definizione di grandezze fisiche che richiedono più informazione e in modo più formale si dice che le grandezze fisiche hanno **proprietà tensoriali**.
A seconda della quantità di informazione necessaria per la definizione abbiamo:
I tensori di ordine zero che hanno bisogno solo del valore per essere definite e vengono anche detti **scalari**.
I tensori di ordine uno che richiedono sia definita una retta di riferimento (retta che si chiama **direzione**), su questa retta posso essere orientati in un modo o in quello opposto (**verso**) e una volta definita la direzione e il verso si deve fornire anche il valore (**modulo o intensità**): tali tensori sono detti anche **vettori** ed è il caso del segmento orientato rappresentabile da una freccia dell'Introduzione.
I tensori di ordine superiore (2, 3, 4, ….) richiedono ulteriori informazioni (ad esempio la direzione di 2 rette per quelli di ordine 2 etc.)

Nel corso useremo grandezze scalari e vettoriali e in un caso accenneremo anche ad un tensore di ordine 2.
Gli scalari sono rappresentati da un numero e **non richiedono** per la loro definizione di un sistema di riferimento: esempio $t = 5$ s.

I vettori richiedono la definizione di un **sistema di riferimento** ovvero 3 assi cartesiani nello spazio (o se siamo nel piano di 2 assi cartesiani) e quindi sono individuati da 3 coordinate (2 coordinate): esempio $\vec{v} = (5, 2, 3)m/s$ (nel piano $\vec{v} = (6, -1)m/s$).
In generale si può dire che hanno **un indice** legato all'asse cartesiano: componente x $\rightarrow v_x$.

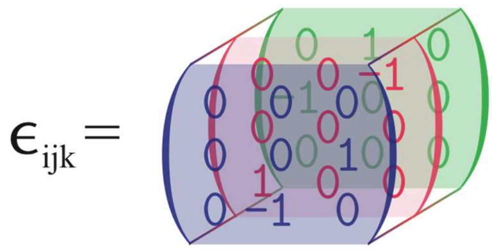


Per individuare la direzione di un asse di riferimento si utilizzano i versori degli assi: $\hat{\imath}$ per x, $\hat{\jmath}$ per y e $\hat{k}$ per z. I versori sono per definizione vettori con modulo unitario: $|\hat{\imath}| = 1$, $|\hat{\jmath}| = 1$, $|\hat{k}| = 1$, hanno la direzione dell'asse e verso concorde con l'asse e sono sormontati dal "cappuccio" anziché la freccia. Tramite i versori e le coordinate è possibile scrivere un vettore in modo alternativo $\vec{v} = (a, b, c) = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$, in tal modo si esplicita il legame delle coordinate con gli assi cartesiani.

Poiché in 3 dimensioni i vettori possono essere uscenti o entranti perpendicolarmente al piano del foglio essi verranno indicati graficamente da ⊙ (uscente, si vede la punta della freccia) ⊗ (entrante, si vede la coda della freccia).

I tensori di ordine superiore hanno anch'essi bisogno di un sistema di riferimento cartesiano e hanno **tanti indici quanto è il loro ordine**. Esempio per un tensore di ordine 2: gli elementi sono rappresentati da componenti con 2 indici $A_{xy} \rightarrow A = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix}$ e quindi sono rappresentabili da matrici, a volte, per indicare questi tensori, la lettera è sormontata dalla doppia freccia $\overleftrightarrow{A}$ per distinguerli dai vettori.

Quelli di ordine 3, da matrici in 3 dimensioni (pensare alla matrice di prima come a un singolo piano e sotto ci sono altri piani di matrici come in figura), ad esempio un elemento è del tipo B_{xyy} con 3 indici.
E così via per gli altri ordini.



Da quanto esposto, i valori degli elementi dei tensori dipendono dal sistema di riferimento scelto.
Due differenti sperimentatori possono scegliere sistemi di riferimento differenti e quindi come si fa a confrontare i risultati?

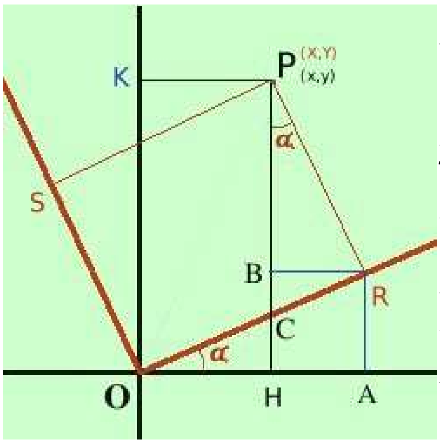
La Fisica si basa su grandezze tensoriali perché queste hanno una legge ben definita di trasformazione tra differenti sistemi di riferimento. Questo permette sempre di confrontare risultati differenti proprio per l'oggettività.
Anche se non faremo uso esplicito di questa proprietà basti dire che tutte le leggi fisiche hanno proprietà tensoriali ben definite.

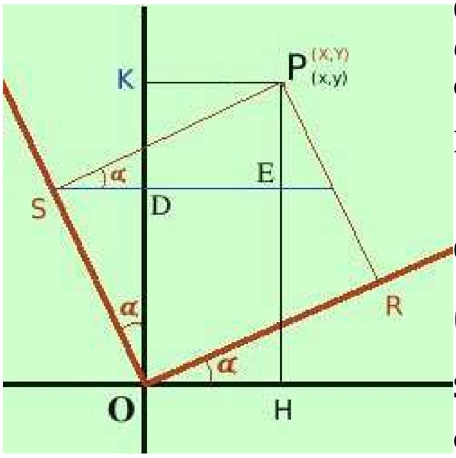
In particolare, **gli scalari non cambiano valore scegliendo un altro sistema di riferimento** quindi il loro valore è sempre lo stesso (non hanno indici legati ad assi di riferimento).

Nel caso dei vettori invece le componenti cambiano, vediamo un esempio.
Scegliamo per semplicità un caso in due dimensioni per ridurre il numero di calcoli ma dal punto di vista concettuale lo stesso si farebbe in 3 dimensioni.
Un sistema di riferimento può cambiare o perché l'origine cambia ma gli assi rimangono paralleli a sé stessi (**traslazione del sistema di riferimento**) o per **rotazione degli assi** (trascuriamo l'operazione di inversione degli assi).
Traslare cambia i punti di applicazione dei vettori ma non modifica le coordinate.
Ruotare cambia anche le coordinate.

Notiamo che i vettori rimangono gli stessi, cambia il modo di rappresentarli con le coordinate.
Prendiamo come vettore la posizione di un punto e **tutte le altre grandezze vettoriali si devono comportare nello stesso modo** se devono essere dei vettori.

In figura (presa da http://www.ripmat.it/mate/d/dc/dcgb.html) si vedono il sistema di riferimento nero e quello rosso ruotato di un angolo α e il punto $P=(x,y)$ nel sistema nero e $P=(x',y')$ nel sistema rosso. La coordinata x nel sistema nero è pari alla lunghezza del segmento OH, invece la coordinata x' vale OR=SP nel sistema rosso mentre y è pari OK nel sistema nero e $y'=PR=OS$ in quello rosso. Quindi, nonostante il punto P sia sempre lo stesso, nei due riferimenti le coordinate sono diverse. I triangoli rettangoli OAR e CRP hanno l'angolo opposto in C e quindi l'altro angolo è uguale (α). Usando la trigonometria applicata ai triangoli rettangoli OAR e PBR: $OA=OR\ \cos\alpha = x'\cos\alpha$ ed anche $AH = BR = PR\sin\alpha = y'\sin\alpha$ ma $x = OH = OA - AH = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$.





Considerando una diversa costruzione, $y = OK = OD + DK$ ma $OD = OS\ \cos\alpha = y'\ \cos\alpha$ e $KD = PE = SP\sin\alpha = x'\sin\alpha$ da cui $y = \ x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$

Mettendo insieme le equazioni $\begin{cases} x = x'\cos\alpha - \ y'\sin\alpha \\ y = \ x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$

Oppure usando la notazione matriciale $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Si vede che la matrice $R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ agisce sulle coordinate nel sistema rosso per ottenere quelle nel sistema nero.

Da quanto detto qualunque vettore (velocità, accelerazione, forza, campo elettrico, campo magnetico,…) cambierà nello stesso modo le sue coordinate, la R è la matrice di trasformazione delle coordinate che a seguito della rotazione si mescolano da quelle rosse per ottenere quelle nere di qualunque vettore (altrimenti per la Fisica una terna ordinata che non verificasse ciò non sarebbe un vettore!).

Il suo determinante è $|R| = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2$=1 e questo valore unitario indica che non vengono modificate le lunghezze dei vettori a passare dal sistema nero a quello rosso (isometrie).

Ovviamente esiste anche la matrice inversa (mescola le coordinate nere per ottenere le rosse) che (senza dimostrazione) è $R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ che moltiplicata righe per colonne con R fornisce la matrice identità $RR^{-1} = R^{-1}R = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se leggiamo questi prodotti da destra (dove si mettere il vettore di partenza) a sinistra si modificano nel primo le coordinate nere in rosse e poi rosse in nere $[RR^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}]$, nel secondo le coordinate rosse in nere e nere in rosse $[R^{-1}R\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}]$ sempre ritornando alla partenza e quindi non deve cambiare nulla da cui la matrice identità I che moltiplicata per un qualunque vettore dato in coordinate in un sistema restituisce un vettore con le stesse coordinate.

Bisogna fare attenzione che un **vettore è un concetto indipendente dalle coordinate** (concetto sintetico, ad esempio il punto P di prima che è sempre lo stesso) ma quando usiamo la rappresentazione analitica abbiamo delle coordinate che a seconda del sistema di riferimento possono cambiare.

Le leggi della Fisica uguagliano grandezze fisiche che dai due membri devono avere la stessa tipologia in modo che, qualunque sistema di riferimento venga scelto, posso fare la trasformazione a nuove coordinate di un nuovo sistema riottenendo **la stessa legge** nelle nuove coordinate.
Ad esempio studieremo la seconda legge di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ con la forza e l'accelerazione che sono vettori e la massa uno scalare, scelto un **qualunque sistema (inerziale** vedremo in seguito il significato) questa legge sarà sempre scritta nello stesso modo utilizzando le coordinate.

Operazioni con grandezze

È bene subito precisare che le operazioni tra grandezze fisiche o su grandezze fisiche possono essere effettuate o meno a seconda del tipo di tensore.
Ad esempio se la grandezza fisica è rappresentata da G non posso scrivere senza pensarci G^3, potrebbe non essere possibile fare l'operazione: se G è uno scalare è possibile, se è un vettore non ha senso.

Sugli scalari o tra scalari che sono numeri reali possiamo eseguire tutte e quattro le operazioni fondamentali (somma e sottrazione richiedono anche l'omogeneità, la somma avrà la stessa unità di misura); sui vettori, la somma si può fare tra grandezze vettoriali omogenee, la divisione fra vettori non è definita e il prodotto non è univoco ma ci sono 3 definizioni distinte perché legati a concetti fisici differenti.
La somma tra grandezze tensoriali differenti non ha senso, non sarebbero omogenee.
Anche il prodotto fra grandezze con proprietà tensoriali differenti potrebbe non essere possibile.

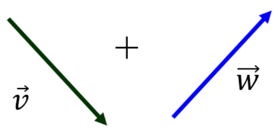
Poiché nelle superiori l'abitudine è di operare con grandezze solamente scalari occorre durante il corso **prestare attenzione al carattere tensoriale della grandezza**. In particolare se la grandezza è uno scalare o un vettore.

Osserviamo che, anche se i tensori di ordine superiore a zero richiedono più informazioni, queste informazioni saranno sempre rappresentabili da numeri reali perciò quanto detto su cifre significative rimane valido per i tensori.

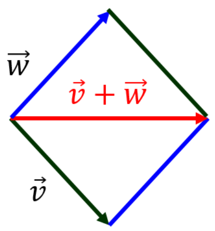
Operazioni con Grandezze vettoriali
Le operazioni possono essere definite in modo sintetico od analitico.

Somma di vettori (solo tra grandezze omogenee quindi la somma ha la stessa unità di misura degli addendi) $\vec{v} + \vec{w}$:

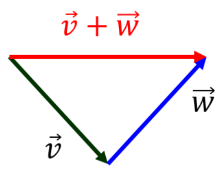
In modo sintetico può essere definita in due modi che ovviamente danno risultati identici.



In un primo modo, i 2 vettori posizionati in qualunque modo devono essere spostati rigidamente fino a far coincidere il loro punto di applicazione. Questi 2 segmenti formano i due lati adiacenti di un parallelogramma, si completa il parallelogramma e si traccia la diagonale dal punto di applicazione comune all'altro vertice. Questa è la **regola del parallelogramma**.



Un secondo modo equivalente è di portare il punto di applicazione del secondo vettore $\vec{w}$ a coincidere con la punta del primo $\vec{v}$, si traccia il vettore che ha punto di applicazione nel punto di applicazione del primo vettore e che termina alla punta del secondo vettore. È chiaro che il triangolo formato è metà del parallelogramma di prima, ma questo modo di procedere fornisce la sequenzialità dell'operazione: mi sposto lungo il primo e poi lungo il secondo.



In entrambi i casi la **somma è commutativa** perché il risultato fornisce vettori uguali sia facendo $\vec{v} + \vec{w}$ sia $\vec{w} + \vec{v}$.

In modo analitico si sommano le componenti corrispondenti: $\vec{v} = (a, b, c)$ e $\vec{w} = (r, s, t)$ da cui $\vec{v} + \vec{w} = (a + r,\ b + s,\ c + t)$. La commutatività dell'operazione è garantita dal fatto che la somma dei numeri reali è commutativa e perciò $\vec{v} + \vec{w} = (a + r,\ b + s,\ c + t) = (r + a,\ s + b,\ t + c) = \vec{w} + \vec{v}$.

Esempio: sommare $(2, -1, 5) + (3,1, -4) = (2 + 3, -1 + 1, 5 - 4) = (5,0,1)$.

La **differenza tra vettori** si può trasformare nella somma con il vettore opposto $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$.
Esempio $(5,2,0) - (1,2,2) = (5 - 1,\ 2 - 2,\ 0 - 2) = (4,\ 0,\ -2)$

Osserviamo che alcune volte **la somma di vettori viene trattata erroneamente come somma dei moduli**, soprattutto perché nelle superiori si sono trattati solo problemi a 1 dimensione in cui la differenza tra vettori e numeri non è così importante, ma le 2 cose sono profondamente diverse.

Si pensi alla somma di 2 vettori di ugual modulo tra loro perpendicolari, potrebbero essere i lati di un quadrato, la somma dei moduli fornisce un **numero** doppio rispetto al modulo del singolo vettore, la somma dei 2 vettori fornisce un **vettore** a 45° rispetto ai due vettori (la diagonale del quadrato) e di modulo $\sqrt{2}$ volte quello del singolo vettore.

Il **prodotto** può essere eseguito anche fra tensori differenti.

Le unità di misure si moltiplicano come normali quantità algebriche.

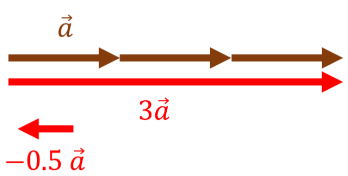
Abbiamo già visto nell'Introduzione il prodotto righe per colonne che potrebbe rappresentare il prodotto tra un tensore di ordine 2 (matrice) e un vettore. Il risultato è un altro **vettore** $\vec{p}$ che in generale **non sarà parallelo a quello di partenza**.

$$\overleftrightarrow{A}\vec{v} = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{xx}a + A_{xy}b + A_{xz}c \\ A_{yx}a + A_{yy}b + A_{yz}c \\ A_{zx}a + A_{zy}b + A_{zz}c \end{pmatrix} = \vec{p}$$

Esempio
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3+0 \\ 6+5+0 \\ 2+4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{p}$ da cui si vede che il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non ha componente z (è un vettore del piano xy), mentre il vettore $\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$ non appartiene al piano xy e non ha componenti proporzionali al primo vettore, quindi non è parallelo a quello di partenza. Se le unità di $\overleftrightarrow{A}$ sono kgm^2 e quelle di $\vec{v}$ $(\frac{rad}{s})^2$ il vettore $\vec{p}$ ha unità $kg\,\frac{m^2}{s^2}$ (ricordarsi che radiante è adimensionale) ovvero joule J.

<u>Prodotto tra uno scalare e un vettore</u> $s\vec{v}$.

<u>In modo sintetico</u> questa operazione non modifica la direzione del vettore ma può cambiare il modulo e il verso: se il numero s è positivo il verso non cambia, se il numero è negativo il verso cambia. Per quanto riguarda il modulo si moltiplica il modulo per $|s|$ (il modulo risultante deve sempre essere positivo anche se $s < 0$), quindi se $|s| > 1$ il segmento orientato risultante si allunga, se $|s| < 1$ il segmento orientato si accorcia.



Il **vettore opposto** al vettore dato si ottiene moltiplicando per $-1\vec{v} = -\vec{v}$.
In figura è mostrato il caso del vettore $\vec{a}$ e $3\vec{a}$ rappresenta il vettore con uguale direzione e verso ma con modulo 3 volte a, infatti la moltiplicazione (almeno con valori razionali) può essere vista come ripetere più volte la somma. È anche mostrato il vettore $-0.5\,\vec{a}$ che ha stessa direzione, verso opposto e modulo la metà di $\vec{a}$.

In <u>modo analitico</u> si moltiplicano le componenti per s: $s\vec{v} = (sa,\ sb,\ sc)$.

Esempio 5 $(-1,3,2) = (-5,15,10)$. Le unità di s siano m e di $\vec{v}$ N (una forza) allora $s\vec{v}$ Nm ovvero joule J e si scrive: $(-5,15,10)\,J$.

Non è definita l'operazione di divisione di un vettore per uno scalare ma questa può essere eseguita dalla moltiplicazione con il reciproco dello scalare: $\frac{\vec{v}}{d} = (\frac{1}{d})\vec{v}$.

Per trovare il **versore di un vettore** basta moltiplicare il vettore per il reciproco del suo modulo: $\frac{1}{v}\vec{v} = \hat{v}$. Osservare che dal punto di vista delle unità di misura divido il vettore per sé stesso e quindi il versore è **adimensionale**.

Il fatto che i versori sono adimensionali è vero anche per i versori degli assi cartesiani e ciò è importante perché quando scrivo $\vec{v} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$ l'unità di misura è portata solo dalle componenti di $\vec{v}$.

Prodotto scalare tra 2 vettori

In modo analitico, questo prodotto corrisponde al prodotto righe per colonne tra un vettore riga e un vettore colonna. In genere però si scrive in forma di riga anche il secondo e quindi per indicarlo si usa il "puntino" fra i vettori (in inglese "dot" product)

$$\vec{v} \bullet \vec{w}$$

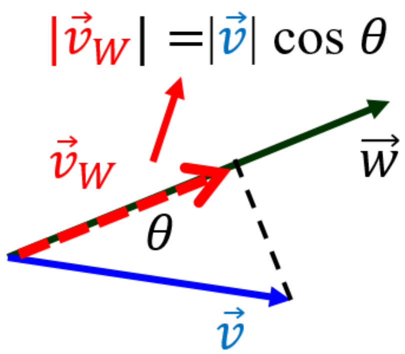
Il risultato è un valore scalare (non dipende dalla scelta degli assi di riferimento).

Esempio: $\vec{F} = (2,7,-1)\,N$ e $\vec{l} = (4,-2,0)\,m$

$\vec{F} \bullet \vec{l} = (2,7,-1) \bullet (4,-2,0) = 2 \cdot 4 + 7 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 = 8 - 14 + 0 = -6.$

Valgono le stesse considerazioni di prima per le unità di misura che ora esplicitiamo:

$\vec{F} \bullet \vec{l} = (2,7,-1) \bullet (4,-2,0) Nm = (2 \cdot 4 + 7 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0) J = (8 - 14 + 0) = -6J,$



In modo sintetico, sposto i due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ affinché il punto di applicazione sia in comune, proietto il primo vettore nella direzione del secondo ottenendo un segmento orientato $\vec{v}_W$ parallelo al secondo vettore, moltiplico tra loro le lunghezze dei vettori $\vec{v}_W$ e $\vec{w}$ col segno + se hanno orientazione concorde, col segno – se sono discordi.

Poiché i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formano un angolo θ (quello più piccolo tra i due), la proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$ modifica la lunghezza di $\vec{v}$ che diventa $v_W = |\vec{v}_W| = v\,|\cos\theta\,|$ da cui considerando anche il segno del coseno $\vec{v} \bullet \vec{w} = v\,w\cos\theta$.

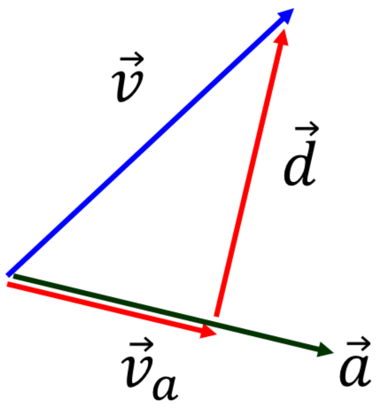
Osservare che **se i vettori sono perpendicolari** $(\theta = \frac{\pi}{2} = 90°)$ **il prodotto scalare è zero**, per un angolo maggiore di 90° il valore è negativo.

Il prodotto scalare è commutativo $\vec{v} \bullet \vec{w} = \vec{w} \bullet \vec{v}$ perché proiettare il secondo vettore sul primo porta allo stesso risultato (il $\cos\theta$ non cambia). In modo analitico questo deriva dalla commutatività dei prodotti tra coordinate (numeri reali).

Come già osservato nel prodotto righe per colonne, $\vec{v} \bullet \vec{v} = vv\cos 0 = v^2$, il **prodotto scalare di un vettore per sé stesso fornisce il quadrato del modulo**.

Per trovare **la componente v_a di un vettore $\vec{v}$ lungo un asse a**, se conosciamo il versore dell'asse $\hat{a}$, basta calcolare $v_a = \vec{v} \bullet \hat{a} = v\;1\;\cos\alpha = v\;\cos\alpha$, con α l'angolo tra $\vec{v}$ e l'asse.

Poiché ogni vettore può generare un versore ed individuare una direzione (la sua), è possibile trovare la componente di altro vettore nella direzione del primo.
Per generare anche il vettore e non solo la componente nella direzione dell'asse $\vec{v}_a = v_a \hat{a}$.
Esempio: trovare la componente del vettore $\vec{v} = (2,7,1)$ nella direzione del vettore $\vec{a} = (-1,1,2)$.
Troviamo il versore:
$a = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \rightarrow \hat{a} = \frac{\vec{a}}{a} = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = (-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{2\sqrt{6}}{6})$,
troviamo la componente $v_a = \vec{v} \bullet \hat{a} = (2,7,1) \bullet \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{2\sqrt{6}}{6}\right) = -2\frac{\sqrt{6}}{6} + 7\frac{\sqrt{6}}{6} + 1\frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{(-2+7+2)\sqrt{6}}{6} = \frac{7}{6}\sqrt{6} = 2.8577380332470411145634980871569 \ldots . \approx 2.86$ (3 cifre significative). La componente è positiva e quindi il vettore $\vec{v}$ si proietta con lo stesso verso di $\vec{a}$.



Il vettore (rosso) nella direzione di $\hat{a}$: $\vec{v}_a = v_a \hat{a} = \frac{7}{6}\sqrt{6}\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{2\sqrt{6}}{6}\right) = \left(-\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{14}{6}\right) \approx (-1.17, 1.17, 2.33)$ (3 cifre significative).
Osserviamo che la parte che manca a $\vec{v}_a$ per ottenere $\vec{v}$ è $\vec{d} = \vec{v} - \vec{v}_a = (2,7,1) - \left(-\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{14}{6}\right) = (\frac{19}{6}, \frac{35}{6}, -\frac{8}{6})$, ovvero $\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{d}$.

Proviamo a fare il prodotto scalare del vettore differenza con $\vec{a}$:
$\vec{d} \bullet \vec{a} = \left(\frac{19}{6}, \frac{35}{6}, -\frac{8}{6}\right) \bullet (-1,1,2) = -\frac{19}{6} + \frac{35}{6} - \frac{16}{6} = 0$ i due vettori sono perpendicolari e $\vec{d}$ è anche perpendicolare a $\vec{v}_a$.

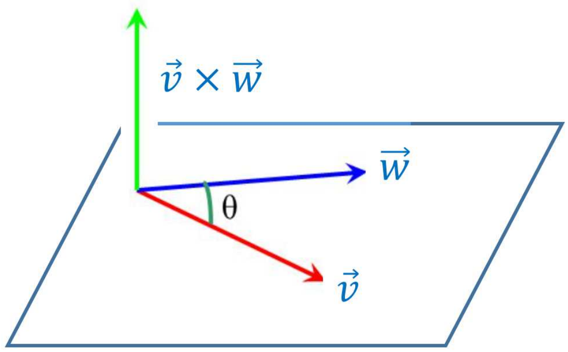
Nel disegno è mostrato schematicamente il significato dei vari vettori calcolati.

<u>Prodotto vettoriale tra 2 vettori</u>

Si indica con $\vec{v} \times \vec{w}$.
<u>Nel modo analitico</u> si costruisce una matrice (impropria perché non contiene solo numeri reali) con i versori degli assi e i due vettori in ordine (seconda riga primo vettore, terza riga secondo vettore) e si calcola il determinante

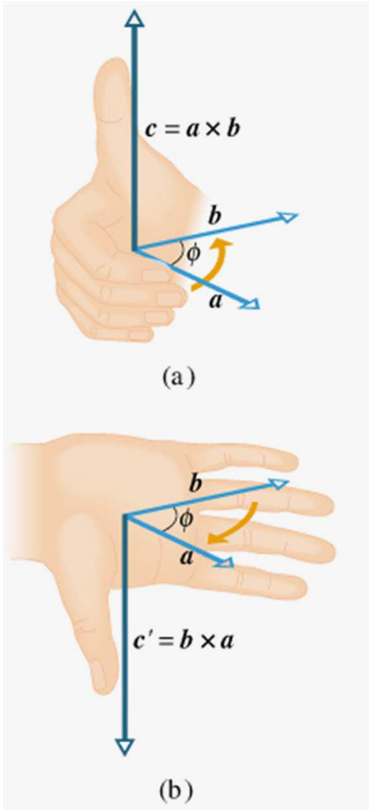
$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a & b & c \\ r & s & t \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} b & c \\ s & t \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} a & c \\ r & t \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} a & b \\ r & s \end{vmatrix} = (bt - cs, \qquad cr - at, \qquad as - br)$$

<u>In modo sintetico</u> si mettono i vettori con punto di applicazione comune, questi due segmenti definiscono, se non sono allineati, 3 punti (il punto di applicazione comune e i due estremi dove stanno le frecce) e quindi individuano il piano su cui giacciono poiché per 3 punti distinti passa un piano ed uno solo.



Il **prodotto vettoriale è in direzione perpendicolare a questo piano**.

Per individuare il verso si utilizza **la regola della mano destra**: si distendono le dita della mano destra nella direzione positiva del primo vettore, la mano viene ruotata dal polso in senso antiorario (guardando dal pollice) secondo l'angolo θ (angolo più piccolo fra i vettori) fino a sovrapporsi all'altro vettore (quindi la mano è orientata in modo opportuno per permettere la rotazione del polso col palmo verso il secondo vettore), il pollice individua lungo la direzione perpendicolare al piano dei vettori il verso del prodotto vettoriale.



Il **modulo è dato da** $|\vec{v} \times \vec{w}| = vw \sin\theta$.
Un **errore comune** è eguagliare $\vec{v} \times \vec{w} = vw \sin\theta$: a primo membro c'è una grandezza vettoriale a secondo membro una grandezza scalare.

Osserviamo che il **prodotto vettoriale** $\vec{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}$ **è perpendicolare al piano e quindi è perpendicolare sia a** $\vec{v}$ **sia a** $\vec{\boldsymbol{w}}$ perciò $\vec{p} \bullet \vec{v} = 0$ e $\vec{p} \bullet \vec{w} = 0$.

Inoltre, **se i due vettori** $\vec{v}$ **e** $\vec{w}$ **sono paralleli il prodotto vettoriale è nullo.**

Il prodotto vettoriale non è commutativo ma anticommutativo ovvero $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$ occorre perciò fare molta attenzione a chi sia il primo fattore del prodotto. Questo genera problemi agli studenti per la definizione di grandezze quali **momento di una forza e momento angolare.**

Osservazione sui sistemi di riferimento: il fatto che il prodotto vettoriale richieda la mano destra, ha implicazioni nella scelta del sistema di riferimento che non è più completamente arbitrario: solo le **terne destrorse** sono utilizzabili ovvero quelle in cui i 3 assi in ordine (cioè primo asse x, secondo asse y, terzo asse z che danno anche l'ordine delle coordinate nelle terne dei vettori) hanno i versori tali che $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$ (cioè ruotando l'asse x sull'asse y per l'angolo più piccolo in senso antiorario si genera l'asse z). Se con la stessa terna, scelgo asse x, asse z e asse y avrei che $\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$ e quindi dovrei cambiare verso all'asse y affinché la terna $\hat{\imath}, \hat{k}, -\hat{\jmath}$ sia destrorsa.

Vedremo dopo come valutare se un sistema di riferimento è destrorso.

$$\vec{v}_{ris} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

Quest'ultima osservazione, in cui i primi due versori della terna devono generare il terzo, permette di utilizzare la regola della mano destra senza rotazioni del polso ma attribuendo all'indice l'asse x, al medio l'asse y e al pollice l'asse z. Dati due vettori di cui si deve fare il prodotto vettoriale, si dispone l'indice lungo il primo vettore (la freccia è l'unghia), il medio lungo il secondo vettore, il pollice indica il verso del prodotto vettoriale.

Prodotto tensoriale tra 2 vettori

Non verrà in pratica utilizzato nel corso e ne diamo solo un cenno. Questo lo abbiamo già visto nell'introduzione col prodotto righe per colonne, da 2 vettori si ottiene una matrice $\vec{v}\otimes\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(r,s,t) = \begin{pmatrix} ar & as & at \\ br & bs & bt \\ cr & cs & ct \end{pmatrix}$ perciò dai due vettori si genera un tensore di ordine 2.

Alcune considerazioni geometriche

Le operazioni tra vettori permettono la risoluzione di problemi geometrici che potrebbero essere utili anche per problemi di Fisica.

Un vettore $\vec{v}$ è lungo una direzione e quindi può essere utilizzato per generare tale retta. Supponiamo di moltiplicarlo per uno scalare $\beta\vec{v}$: al variare di β la lunghezza del vettore cambia e se è negativo anche il verso quindi ogni punto della retta può essere raggiunto dalla punta della freccia del vettore. Sappiamo che per individuare completamente un vettore serve anche il punto di applicazione $P_A = \vec{v}_A$ che è un altro vettore e quindi la retta passante per P_A è esprimibile come $\vec{r} = \beta\vec{v} + P_A = \beta\vec{v} + \vec{v}_A$ (**rappresentazione parametrica**, parametro β).
Al variare del punto di applicazione vengono descritte tutte le rette parallele a quella di partenza. Per la retta $\vec{r}$, $\vec{v}$ è il **vettore direzionale**.

La definizione del prodotto scalare ad esempio fornisce un metodo per verificare se 2 vettori sono **perpendicolari**, si esegue il prodotto scalare verificando che sia nullo.

In 2D è particolarmente semplice generare un vettore perpendicolare ad un altro: dato $\vec{v} = (a,b)$ basta scambiare di posto le coordinate e cambiare segno di una $\vec{w} = (-b,a)$ oppure il suo opposto $\vec{w}' = -(-b,a) = (b,-a)$. Infatti il prodotto scalare $\vec{v}\bullet\vec{w} = -ab + ba = 0$ oppure $\vec{v}\bullet\vec{w}' = ab - ba = 0$.

Esempi: dato il versore $\hat{\imath} = (1,0)$ i due versori perpendicolari sono $(-0,1) = (0,1)$ oppure (0,-1) ovvero i versori $\hat{\jmath}$ e $-\hat{\jmath}$.

Dato il vettore $\vec{l} = (2,-3)$ un vettore perpendicolare è (3,2).

Trovare la retta perpendicolare a $y = 2x - 3$.
Per scrivere la retta sotto forma vettoriale (parametrica) occorre trovare il vettore direzionale e un punto della retta.
Scriviamo $x = \beta$ (per far dipendere x dal parametro) da cui $y = 2\beta - 3$
$\begin{cases} x = \beta = 1 \cdot \beta \\ y = 2\beta - 3 \end{cases}$ da cui si vede che il vettore direzionale è $\vec{v} = (1,2)$ e il punto per cui passa la retta per $\beta = 0$ è $P_A = (0,-3)$ da cui $\vec{r} = \vec{v}\beta + P_A$.
Se considero il vettore perpendicolare $\vec{w} = (2,-1)$, la retta perpendicolare passante per P_A è $\vec{s} = \vec{w}\gamma + P_A = (2\gamma, -\gamma - 3)$ (parametro γ) ovvero $\begin{cases} x = 2\gamma \\ y = -\gamma - 3 \end{cases}$ da cui eliminando il parametro $\gamma = \frac{x}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 3$ è la retta perpendicolare a quella data.

In 3D il calcolo è meno immediato poiché la retta direzione di $\vec{v} = (a,b,c)$ è perpendicolare a un piano (ad esempio si pensi all'asse z perpendicolare al piano xy) e quindi per trovare un vettore $\vec{w} = (r,s,t)$ perpendicolare servono più informazioni.

L'annullamento del prodotto scalare ci fornisce $\vec{v} \bullet \vec{w} = ar + bs + ct = 0$ e imponendo ad esempio $t = 1$ se $c \neq 0 \rightarrow ar + bs = -c$ e ancora imponendo $s = 1$ se $b \neq 0 \rightarrow ar = -b - c$ e, se $a \neq 0$, si trova $r = -\frac{b+c}{a}$ da cui il vettore perpendicolare $\vec{w}_0 = (-\frac{b+c}{a}, 1, 1)$.

Ovviamente posso arbitrariamente fissare 2 delle 3 componenti di $\vec{w}$ come abbiamo fatto per t e s (quindi la dimensionalità delle possibili soluzioni è 2, un piano, ogni vettore di questo piano è perpendicolare a $\vec{v}$).
Ad esempio $t = 0$ e $s = 1 \rightarrow ar + b = 0 \rightarrow r = -\frac{b}{a} \rightarrow \vec{w}_1 = (-\frac{b}{a}, 1{,}0)$ oppure $t = 1$ e $s = 0$ $\rightarrow ar + c = 0 \rightarrow r = -\frac{c}{a} \rightarrow \vec{w}_2 = (-\frac{c}{a}, 0{,}1)$ e così via.
Considerando proprio $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, tutti i vettori generati dalla somma con coefficienti reali α e β di questi sono perpendicolari $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$. Ad esempio $\vec{w}_0 = 1\vec{w}_1 + 1\vec{w}_2 = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$.

Un altro modo potrebbe sfruttare il prodotto vettoriale che genera un vettore perpendicolare ai 2 vettori di partenza: si sceglie arbitrariamente un vettore non parallelo a quello dato, si esegue il prodotto vettoriale che automaticamente fornisce un vettore perpendicolare. Vediamo un esempio. Sia $\vec{v} = (2{,}3{,}1)$, scegliamo arbitrariamente $\vec{l} = (1{,}0{,}0)$ (con tanti zeri per semplificare i calcoli e sicuramente non è parallelo a $\vec{v}$ altrimenti il prodotto vettoriale sarebbe nullo)

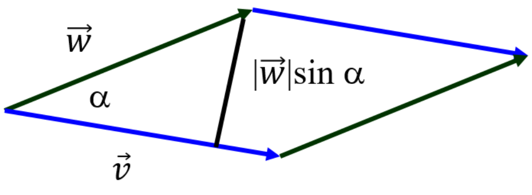
$$\vec{w} = \vec{v} \times \vec{l} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, -3).$$

Verifichiamo la perpendicolarità $(2{,}3{,}1) \bullet (0{,}1, -3) = 0 + 3 - 3 = 0$.

Il prodotto scalare permette di trovare l'angolo tra vettori sfruttando la presenza del $\cos\theta$: basta operare con i versori dei vettori $\hat{v} \bullet \hat{w} = 1\ 1\ \cos\theta = \cos\theta$ e usando la funzione inversa del coseno (arcocoseno acos) $\theta = \cos^{-1}(\hat{v} \bullet \hat{w}) = \text{acos}(\hat{v} \bullet \hat{w})$.

Esempio trovare l'angolo tra i vettori $\vec{v} = (4{,}2{,}3)$ e $\vec{w} = (1{,}2, -1)$: i moduli dei vettori sono $v = \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}} = \sqrt{16 + 4 + 9} = \sqrt{29}$ e $w = \sqrt{\vec{w} \bullet \vec{w}} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$ quindi $\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{29}}(4, 2, 3)$ e $\hat{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1{,}2, -1)$ (terremo in questa forma senza moltiplicare ciascuna coordinata per il reciproco del modulo) da cui $\hat{v} \bullet \hat{w} = \frac{1}{\sqrt{29}}\frac{1}{\sqrt{6}}\big(4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)\big) = \frac{5}{\sqrt{174}} = 0.379 \ldots\ldots$ e $\text{acos}(0.379 \ldots) = 1.1820 \ldots\ rad \approx 1.2\ rad$ con 2 cifre significative (in gradi 67.7252..°≈ 68°).

Osserviamo che il disegno in 3D non permette di vedere chiaramente gli angoli, ma il calcolo procede senza difficoltà usando la doppia definizione sia in rappresentazione sintetica sia analitica del prodotto scalare.



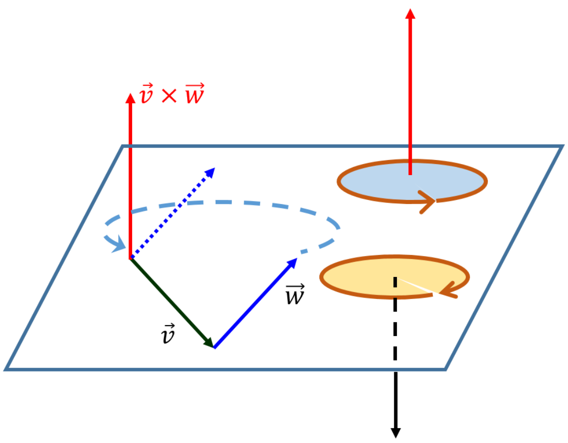
Il prodotto vettoriale ha un significato geometrico legato all'area del parallelogramma avente per lati i vettori. Infatti l'altezza è data da $h = |\vec{w}| \sin\alpha$ e la base da $|\vec{v}|$ da cui l'area $A = bh = vw\sin\alpha$. D'altra parte il prodotto vettoriale genera un vettore perpendicolare al piano del parallelogramma. Questo permette di far diventare l'area un concetto vettoriale e perciò dare un'**orientazione alle aree**.

Se prendiamo un foglio di carta questo può essere guardato da 2 parti, una faccia la possiamo definire come quella positiva e l'altra dietro è quella negativa, il prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{w}$ fa esattamente questo: genera il **vettore normale** (cioè perpendicolare) all'area e definisce positiva la faccia da dove il vettore esce (e negativa quella dove entra).

In particolare il vettore normale è in genere il **versore normale** $\hat{n}$ (che individua anche il piano su cui giace il parallelogramma) ottenuto normalizzando a 1 il prodotto vettoriale.
L'area può anche essere scritta come $\vec{A} = A\hat{n}$, con A il modulo del vettore area che è il valore solitamente utilizzato e positivo. Invece il vettore area può anche aver componente negativa su un asse.
Di questo concetto di area si farà uso in Elettromagnetismo (e in quelle parti della Fisica in cui si studia il movimento dei fluidi, come l'idrodinamica, e il concetto di **flusso** è importante).

Guardando dalla faccia positiva, il prodotto vettoriale definisce le orientazioni delle rotazioni come quelle antiorarie.
Infatti nella definizione di prodotto vettoriale la mano destra, vista dal pollice, ruota in senso antiorario.

Questo fa intuire che il **prodotto vettoriale sarà impiegato nei moti rotatori**.

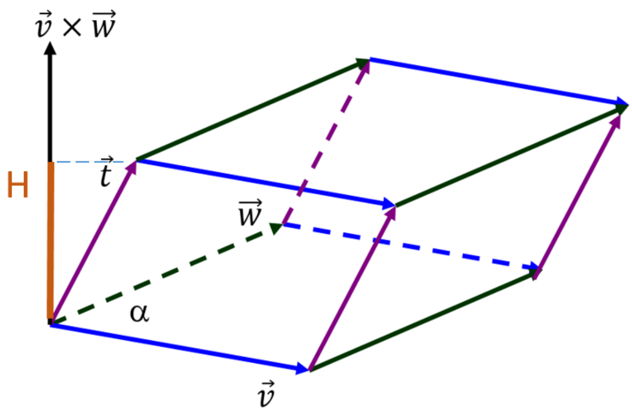


Se mettiamo i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ punta-coda (in ordine primo-secondo) e si segue l'ordine delle frecce $\vec{v} \rightarrow \vec{w}$, si vede che il parallelogramma verrebbe "circolato" in senso antiorario. Se mettiamo le dita della mano destra lungo questo contorno, il pollice punta lungo $\vec{v} \times \vec{w}$. Nel caso di un'area generica disponendo le dita della mano destra lungo il contorno orientato in senso antiorario (area azzurra) fornirà il pollice nella stessa direzione e verso di $\vec{v} \times \vec{w}$, se il contorno è orientato in senso orario (area gialla), il pollice avrà verso opposto.

Questo porta a definire aree (anche di forma qualunque) il cui contorno ha circolazione antioraria e quindi l'area racchiusa è positiva, invece aree racchiuse da contorni con circolazione oraria hanno valore negativo: dal punto di vista del vettore area sono le coordinate positive o negative rispetto ad un asse verticale verso l'alto.

Anche queste proprietà saranno utilizzate in Elettromagnetismo con la **circuitazione**. Nei fluidi questo ha implicazioni nello studio del moto vorticoso.

Se consideriamo un terzo vettore $\vec{t}$ non complanare con i primi due formiamo un prisma e il suo volume sarà dato dall'area di base del parallelogramma moltiplicata per l'altezza H del prisma.
Il vettore $\vec{t}$ è in generale non perpendicolare al piano di base e quindi è opportuno proiettarlo sulla perpendicolare per ottenere l'altezza. Il vettore perpendicolare al piano di base è proprio il prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{w}$ con versore



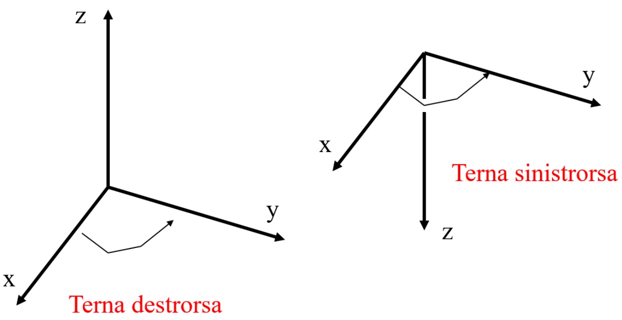
$\frac{\vec{v}\times\vec{w}}{|\vec{v}\times\vec{w}|}$ quindi $H = \vec{t}\bullet\frac{\vec{v}\times\vec{w}}{|\vec{v}\times\vec{w}|}$. Il volume sarà perciò $Area \cdot H = |\vec{v}\times\vec{w}\,|(\vec{t}\bullet\frac{\vec{v}\times\vec{w}}{|\vec{v}\times\vec{w}|}) = \vec{t}\bullet\vec{v}\times\vec{w}$.

Questo prodotto che coinvolge prodotto scalare e prodotto vettoriale si chiama **prodotto misto** e si calcola tramite il determinante che contiene le righe in ordine dei 3 vettori

$$\vec{t}\bullet\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} t_x & t_y & t_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Oltre ad essere legato al calcolo del volume, il prodotto misto ha la proprietà:
- **di essere positivo se i 3 vettori formano nell'ordine ($\vec{t}, \vec{v}, \vec{w}$) una terna destrorsa**,
- se viene zero i tre vettori sono complanari (il prisma è schiacciato con altezza nulla)
- **se è negativo la terna è sinistrorsa** e non deve essere considerata come una terna valida.

In figura si vede una terna destrorsa x,y,z e una terna sinistrorsa in cui si è effettuato il cambio nel verso dell'asse z.



Per cambiare una terna da sinistrorsa a destrorsa è sufficiente cambiare il verso a uno dei vettori prendendo l'opposto o scambiarne 2 di posto.

Esempio: dati i tre vettori (non perpendicolari) $\vec{a} = (1{,}5,-3)$, $\vec{b} = (2{,}0{,}1)$ e $\vec{c} = (1{,}1{,}0)$, valutare se formano una terna destrorsa.
Calcoliamo il prodotto misto $\vec{a}\bullet\vec{b}\times\vec{c} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$-1 + 5 - 6 = -2$ la terna è perciò sinistrorsa.

Per renderla destrorsa o scambiamo di posto 2 vettori

$$\vec{b}\bullet\vec{a}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 6 + 0 - 4 = 2$$

oppure sostituiamo un vettore col suo opposto

$$\vec{a}\bullet\vec{b}\times(-\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 1 - 5 + 6 = 2$$

Osserviamo che il prodotto misto non cambia se i tre vettori vengono **scambiati ciclicamente** ovvero "fatti ruotare" $\vec{a}\bullet\vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\bullet\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\bullet\vec{c}\times\vec{a}$, questo fornisce anche le possibili terne destrorse dati 3 vettori con un certo ordine.

Vediamo degli ulteriori casi con vettori espressi come somma di multipli di versori ortonormali ossia della forma $\vec{v} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$.

Osserviamo che a volte i versori degli assi x,y,z potrebbero essere indicati da $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ oppure da $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ con componenti $\hat{\imath} = \hat{e}_x = \hat{u}_x = (1,0,0)$, $\hat{\jmath} = \hat{e}_y = \hat{u}_y = (0,1,0)$, $\hat{k} = \hat{e}_z = \hat{u}_z = (0,0,1)$.

I versori della terna ortogonale ovviamente verificano
$\hat{e}_x \bullet \hat{e}_x = 1, \quad \hat{e}_y \bullet \hat{e}_x = 0,$
$\hat{e}_z \bullet \hat{e}_x = 0, \quad \hat{e}_y \bullet \hat{e}_z = 0,$
$\hat{e}_y \bullet \hat{e}_y = 1, \quad \hat{e}_z \bullet \hat{e}_z = 1$

Esempio:
$\vec{v}_1 = (1,2,4) = 1\hat{e}_x + 2\hat{e}_y + 1\hat{e}_z$
$\vec{v}_2 = (-2,-2,3) = -2\hat{e}_x - 2\hat{e}_y + 3\hat{e}_z$
$\vec{v}_3 = (1,-2,3) = 1\hat{e}_x - 2\hat{e}_y + 3\hat{e}_z$

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (1-2)\hat{e}_x + (2-2)\hat{e}_y + (4+3)\hat{e}_z = -\hat{e}_x + 0\hat{e}_y + 7\hat{e}_z = (-1,0,7)$$

$\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = \left(1\hat{e}_x + 2\hat{e}_y + 1\hat{e}_z\right) \bullet \left(-2\hat{e}_x - 2\hat{e}_y + 3\hat{e}_z\right) =$

$$= [1\cdot(-2)]\hat{e}_x \bullet \hat{e}_x + [1\cdot(-2)]\hat{e}_x \bullet \hat{e}_y + (1\cdot 3)\hat{e}_x \bullet \hat{e}_z +$$
$$[2\cdot(-2)]\hat{e}_y \bullet \hat{e}_x + [2\cdot(-2)]\hat{e}_y \bullet \hat{e}_y + (2\cdot 3)\hat{e}_y \bullet \hat{e}_z +$$
$$[4\cdot(-2)]\hat{e}_z \bullet \hat{e}_x + [4\cdot(-2)]\hat{e}_z \bullet \hat{e}_y + (4\cdot 3)\hat{e}_z \bullet \hat{e}_z =$$

$$[1\cdot(-2)]1 + [1\cdot(-2)]0 + (1\cdot 3)0 +$$
$$[2\cdot(-2)]0 + [2\cdot(-2)]1 + (2\cdot 3)0 +$$
$$[4\cdot(-2)]0 + [4\cdot(-2)]0 + (4\cdot 3)1 =$$

$$1\cdot(-2) + 2\cdot(-2) + (4\cdot 3) = -2 - 4 + 12 = 6$$

$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left(1\hat{e}_x + 2\hat{e}_y + 4\hat{e}_z\right) \times \left(-2\hat{e}_x - 2\hat{e}_y + 3\hat{e}_z\right) =$
$$= [1\cdot(-2)]\hat{e}_x \times \hat{e}_x + [1\cdot(-2)]\hat{e}_x \times \hat{e}_y + (1\cdot 3)\hat{e}_x \times \hat{e}_z +$$
$$[2\cdot(-2)]\hat{e}_y \times \hat{e}_x + [2\cdot(-2)]\hat{e}_y \times \hat{e}_y + (2\cdot 3)\hat{e}_y \times \hat{e}_z +$$
$$[4\cdot(-2)]\hat{e}_z \times \hat{e}_x + [4\cdot(-2)]\hat{e}_z \times \hat{e}_y + (4\cdot 3)\hat{e}_z \times \hat{e}_z =$$

$$= [1\cdot(-2)]\vec{0} + [1\cdot(-2)]\hat{e}_x \times \hat{e}_y + (1\cdot 3)\hat{e}_x \times \hat{e}_z +$$
$$[2\cdot(-2)]\hat{e}_y \times \hat{e}_x + [2\cdot(-2)]\vec{0} + (2\cdot 3)\hat{e}_y \times \hat{e}_z +$$
$$[4\cdot(-2)]\hat{e}_z \times \hat{e}_x + [4\cdot(-2)]\hat{e}_z \times \hat{e}_y + (4\cdot 3)\vec{0}$$
Dove $\vec{0} = (0,0,0)$ è il vettore nullo.

a) $\hat{e}_x \times \hat{e}_y = \hat{e}_z$ (→x,y,z terna destrorsa),
b) $\hat{e}_x \times \hat{e}_z = -\hat{e}_y$ (scambio di 2 vettori della terna destra, x,z,y è sinistrorsa),
c) $\hat{e}_y \times \hat{e}_x = -\hat{e}_z$ (anti commutatività, la terna y,x,z non è più destrorsa),
d) $\hat{e}_y \times \hat{e}_z = \hat{e}_x$, (rispetto a quella precedente scambio di 2 vettori, terna y,z,x destrorsa)
e) $\hat{e}_z \times \hat{e}_x = \hat{e}_y$, (scambio rispetto a b)
f) $\hat{e}_z \times \hat{e}_y = -\hat{e}_x$ (scambio rispetto a d)

Perciò
$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = [1\cdot(-2)]\hat{e}_z + (1\cdot 3)(-\hat{e}_y) +$$
$$[2\cdot(-2)](-\hat{e}_z) + (2\cdot 3)\hat{e}_x +$$
$$[4\cdot(-2)]\hat{e}_y + [4\cdot(-2)](-\hat{e}_x) =$$

$= [1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2)]\hat{e}_z + [4 \cdot (-2) - 1 \cdot 3]\ \hat{e}_y + [(2 \cdot 3) - 4 \cdot (-2)]\hat{e}_x =$
$=2\ \hat{e}_z - 11\hat{e}_y - 2\hat{e}_x = (14, -11, 2)$

Prodotto misto $\vec{v}_3 \bullet \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left(\ 1\hat{e}_x - 2\hat{e}_y + 3\hat{e}_z\right) \bullet (\ -2\hat{e}_x - 11\hat{e}_y + 2\ \hat{e}_z) =$
$= 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-11) + 3 \cdot 2 = -2 + 22 + 6 = 26 > 0$

La terna (ordinata) formata dai vettori $\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ è destrorsa.

Non sarà ortogonale ma si può sempre renderla tale con un procedimento che verrà spiegato in altri corsi.