1 - IL MOTO

La parte della Fisica che studia il *moto* è la **Meccanica** che viene solitamente divisa in due parti: Cinematica e Dinamica.

In Cinematica si sviluppa la descrizione del moto dei corpi senza però interessarsi alle cause.

In Dinamica, utilizzando la descrizione della Cinematica, si affronta il problema di determinare il moto prendendo in considerazione le cause.

Le grandezze fisiche fondamentali della meccanica già introdotte in precedenza sono:

i) *tempo* (che si misura in secondi; *s*)
ii) *lunghezza* (che si misura in metri; *m*)
iii) *massa* (che si misura in chilogrammi; *kg*).

Le unità di misura indicate sono quelle del Sistema Internazionale, sistema che noi utilizzeremo e tutte le unità delle grandezze fisiche dovranno essere espresse in questo sistema.

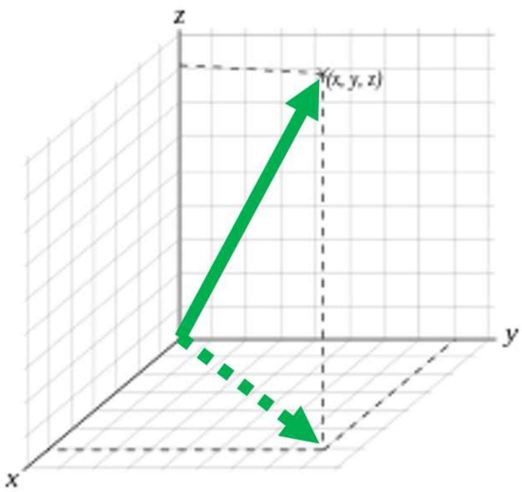
I PARTE: POSIZIONE E TRAIETTORIA

Nello studio del moto s'introducono alcuni concetti fondamentali come:

a) *sistema di riferimento*,
b) *posizione, spostamento, traiettoria,*
c) *velocità*,
d) *accelerazione.*

1) Descrizione e studio di un moto

Quando si parla di moto occorre sempre definire il ***riferimento*** rispetto a cui si definisce il movimento. Questo sistema di riferimento è scelto da chi osserva il movimento e lo vuole descrivere.



Il moto è quindi relativo ad un certo sistema di riferimento.

Ad esempio: se sono seduto sul treno in movimento le persone sedute con me non si muovono se definisco il sistema di assi solidali al treno, le stesse persone viste da terra da un secondo osservatore che sceglierà un sistema fisso col terreno saranno invece in movimento.

Abbiamo già visto la definizione di un sistema di riferimento per trovare le coordinate di un vettore. Inoltre l'esperienza accumulata nel corso dei secoli ci ha permesso arrivate alla conclusione che **lo stato meccanico di un sistema è completamente definito da tre grandezze fisiche: *posizione, velocità e accelerazione* e si può dire di conoscere un moto quando si sanno valutare, istante per istante, questi tre parametri.**

POSIZIONE

La **misura di posizione** (definizione operativa) di un punto con uno strumento (metro) corrisponde a:

a) partire da un'origine facendo coincidere l'inizio (in genere lo zero del metro)
b) stendere lo strumento di misura
c) Andare all'oggetto
d) raggiunto l'oggetto, leggere il valore della misura

che possiamo anche riscrivere come

a) partire dall'**origine**
b) muoversi lungo la **direzione** (**R**)
c) **verso** l'oggetto
d) misurare la **lunghezza**

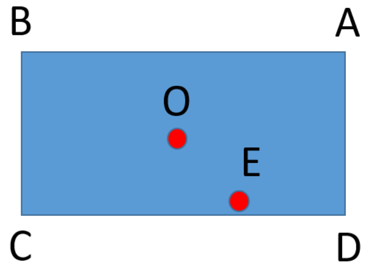
Abbiamo quindi un segmento definito da un estremo (origine) **verso** un altro estremo (oggetto), il segmento giace su una retta (**R**) che fornisce la **direzione** e il segmento ha una **lunghezza o modulo**.

Abbiamo quindi quattro elementi per definire la **posizione**: origine, direzione, verso e modulo.

Se l'origine viene fissata per ciascuna misura di posizione e coincide con l'origine degli assi di riferimento, allora è necessaria la conoscenza di 3 quantità direzione, verso e modulo ottenute seguendo la procedura definita prima: grandezze che necessitano di queste tre quantità sono i **vettori**→ **la posizione è un vettore**.

Il vettore posizione è quindi rappresentato dal segmento orientato che parte dall'origine (O) e arriva all'oggetto possiamo indicarlo come $\vec{r}$ (rappresentazione sintetica) oppure dalle sue coordinate (terna ordinata di numeri reali in 3D, rappresentazione analitica) $\vec{r} = (x, y, z)$.

Il **punto di applicazione** del vettore posizione è sempre l'origine degli assi di un sistema di riferimento che abbiamo scelto per la descrizione del moto.



Facciamo un'importate osservazione. I vari corpi che osserviamo sono però composti da vari punti e quindi cosa vuol dire la posizione di un corpo?

Supponiamo di considerare un rettangolo ABCD nel piano, possiamo dare la posizione del centro O come posizione del corpo però questo non ci dice nulla sulla posizione dei vertici A, B, C e D, ovvero non sappiamo l'orientazione del quadrato, potrebbe essere ruotato attorno al suo centro di un qualunque angolo.

Per definire in modo univoco la sua posizione occorre fornire la posizione di un secondo punto del rettangolo, ad esempio E. Se fornisco la posizione di O e la posizione di E, la posizione di tutti i punti del rettangolo nel piano è perfettamente definita.

Lo stesso rettangolo nello spazio 3D, definendo solo la posizione di O ed E non si ha modo di definire in modo univoco le posizioni degli altri punti. Infatti si può far ruotare il rettangolo attorno alla retta che passa per O ed E e gli altri punti del rettangolo hanno posizioni diverse. Aggiungendo

un terzo punto distinto (e quindi definendo il piano su cui giace il rettangolo) si conosce univocamente la posizione di tutti i punti del rettangolo.
Quindi per un corpo in 3D la descrizione diventa complicata ed essendo coinvolti angoli anche la rotazione oltre alla traslazione deve essere presa in considerazione.

Per iniziale a introdurre i concetti fondamentali del moto è possibile semplificare la descrizione del moto pensando di ridurre le dimensioni del corpo. In tale processo ipotetico tutti i punti vengono a coincidere con quello "centrale" e quindi anche gli angoli che definiscono la giacitura del corpo perdono significato perciò le rotazioni del corpo non vengono prese in considerazione. Basta la posizione del centro per definire univocamente la posizione del corpo e solo le traslazioni sono da considerare.
Questo definisce il concetto di **punto materiale** ovvero un punto geometrico a cui è associata una massa. Operare in **approssimazione di punto materiale** vuol dire descrivere il moto di sola traslazione del corpo tramite il vettore $\vec{r}$.

Il senso dell'operazione "ridurre le dimensioni del corpo" significa che, per le dimensioni in cui avviene il moto, le dimensioni del corpo non contano.
Per esempio la Terra è certamente grande (raggio $R = 6.4 \cdot 10^3\ km$), ma il moto della Terra attorno al Sole avviene con una distanza Terra-Sole di $1.5 \cdot 10^8\ km$, la Terra è approssimabile ad un punto materiale.

Una nave in mare ha dimensioni trascurabili a quelle del suo viaggio e si può descrivere come punto materiale. Non appena arriva in porto, le dimensioni delle banchine sono confrontabili e la nave non è più approssimabile a punto materiale: la manovra in porto deve tener conto della sua giacitura e dello spazio occupato per non andare a sbattere su altre navi o con le banchine.

Un'auto su una strada è approssimabile a punto materiale, ma non appena si deve posteggiare occorre tener conto della sua giacitura e delle sue dimensioni reali.

In questa prima parte del corso si opererà in approssimazione di punto materiale. Non appena si considereranno i sistemi di punti materiali e poi i corpi rigidi, le dimensioni del corpo contano e occorrerà tener conto anche delle rotazioni.

2) Traiettoria

La posizione $\vec{r}$ occupata da un corpo (puntiforme) in moto evolve nel tempo, l'insieme di questi punti posizione forma la ***traiettoria*** seguita dal corpo. Quindi possiamo scrivere $\vec{r}(t)$.

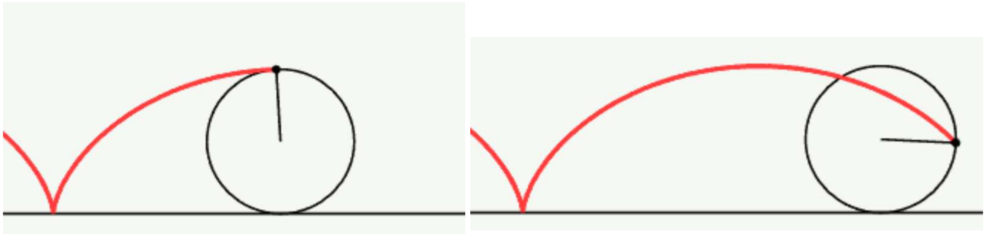
Il semplice caso della punta della penna su un foglio che lascia una traccia continua fornisce un'idea di traiettoria. Ad ogni istante t la penna sta segnando un punto e muovendosi, ovvero ad istanti successivi $t_1 < t_2 < t_3 \dots \dots < t_n$, altri punti vengono definiti.

In rappresentazione analitica questo vuol dire che **ciascuna coordinata è una funzione del tempo** $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
Questa $\vec{r}(t)$ è **l'equazione parametrica del moto**, il **parametro è il tempo**.
Le funzioni che esprimono le coordinate sono le **leggi orarie** del moto per ciascuna coordinata.

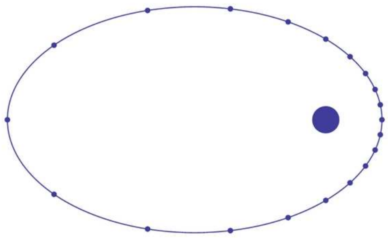
Rispetto alla forma geometrica, si identificano moti particolarmente interessanti:

a) ***moto rettilineo***, che avviene su una traiettoria rappresentabile con una linea retta (alcuni esempi: il del moto del treno sui tratti di binario non in curva; la caduta libera di un corpo che parte da fermo);
b) ***moto circolare***, che avviene su una traiettoria rappresentabile con una circonferenza (alcuni esempi: il moto di una ruota con asse fisso; il moto di un pendolo).

I moti si possono combinare: ad esempio il moto di un punto sulla periferia di una ruota che si sposta senza strisciare, combinazione di un moto circolare e uno rettilineo, è una cicloide, mostrato in figura dalla linea rossa.

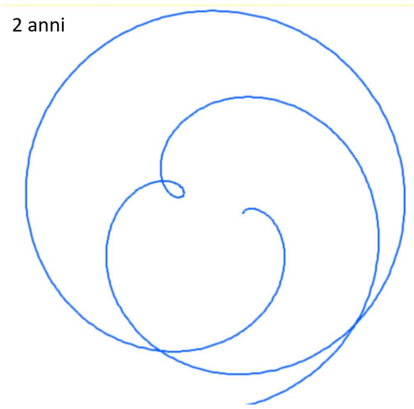


Il punto nero sulla circonferenza individuato dal raggio è mostrato in due istanti successivi, considerando tutti gli istanti si viene a formare la linea rossa che è la traiettoria del punto.



Un altro esempio è il moto dei pianeti attorno al Sole che sappiamo descrivono una traiettoria ellittica.
In figura è mostrata una traiettoria ellittica attorno al Sole con alcuni punti raggiunti dal pianeta a particolari istanti di tempo.

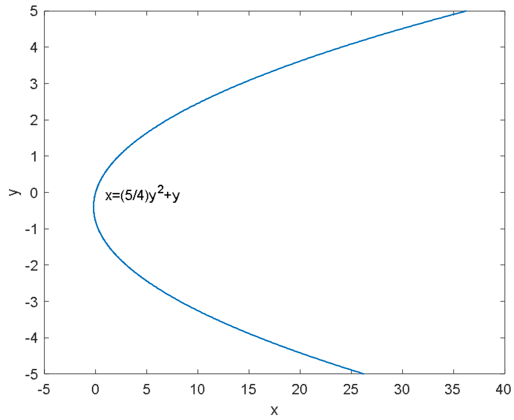
Però, se la stessa traiettoria dei pianeti è vista dalla Terra, la curva risultante è più complicata perché si devono sovrapporre il moto della Terra e quella del pianeta.



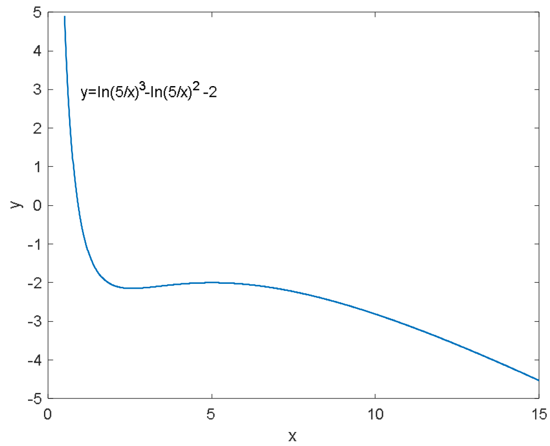
In figura è mostrato il moto di Venere visto dalla Terra su un intervallo di 2 anni.

Se conosciamo le coordinate in funzione del tempo, supponiamo che almeno una della funzioni sia invertibile, per esempio la x e quindi possiamo scrivere $x(t) = f(t) \rightarrow t = g(x) = t(x)$, sosituendo nelle altre coordinate $y(t(x)), z(t(x))$ ovvero sono funzioni della coordinata x e non più del parametro tempo.

Eliminando il tempo abbiamo ottenuto la descrizione geometrica della traiettoria, conosciamo la forma (geometrica) della traiettoria ma abbiamo perso l'informazione di sapere quanto tempo occorre per andare da un punto ad un altro della traiettoria.



Esempio nel piano: $x = 5t^2 - 2t$, $y = -2t$. In tal caso è sicuramente invertibile la seconda funzione $t = -\frac{y}{2}$ da cui $x(y) = 5\left(-\frac{y}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{y}{2}\right) = \frac{5}{4}y^2 + y$, da cui si riconosce che la traiettoria è una parabola con asse orizzontale.



Esempio nel piano: $x = 5e^{-t}$, $y = t^3 - t^2 - 2 \rightarrow t = -\ln\left(\frac{x}{5}\right) = \ln(\frac{5}{x}) \rightarrow y(x) = (\ln(\frac{5}{x}))^3 - \left(\ln\left(\frac{5}{x}\right)\right)^2 - 2.$

Esempio nel piano: $x = 5t^2$, $y = 2t^2 - 2$ ed il moto avviene per $t \geq 0 \rightarrow t = \sqrt{\frac{x}{5}}$ l'argomento è sicuramente non negativo$\rightarrow y(x) = 2\left(\sqrt{\frac{x}{5}}\right)^2 - 2 = \frac{2}{5}x - 2$, la traiettoria è una (semi)retta con x che partendo da zero incrementa nel tempo (la traiettoria da sola però non fornisce questa informazione).

Se il moto avvenisse per tutti i tempi $t = \pm\sqrt{\frac{x}{5}}$ l'argomento è sempre non negativo ma ora non è univoca la relazione tra t e x e quindi occorre considerare separatamente i due casi$\rightarrow$

$y(x) = 2\left(+\sqrt{\frac{x}{5}}\right)^2 - 2 = \frac{2}{5}x - 2,$

$y(x) = 2\left(-\sqrt{\frac{x}{5}}\right)^2 - 2 = \frac{2}{5}x - 2$, la traiettoria è la stessa retta per entrambi i casi ed uguale a prima, anzi la semiretta perché il corpo ha sempre $x \geq 0$.

La differenza è che il corpo, in istanti diversi, procede con verso opposto su questa semiretta, questa informazione è persa considerando la traiettoria che non contiene l'informazione del tempo.

Osserviamo in questo ultimo esempio che, nonostante le leggi orarie delle 2 coordinate fossero delle **parabole nel tempo**, la **traiettoria è una retta**. Quindi, anche se esiste un legame tra leggi orarie e traiettoria, i due concetti non vanno confusi.

3) Spostamento

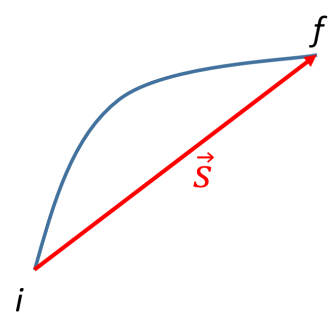
I punti si susseguono al variare del tempo e possiamo conoscere il punto occupato dal corpo all'istante che chiameremo iniziale t_i, questo punto è $\vec{r}(t_i) = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$. Ad un istante successivo che chiameremo finale t_f la posizione è $\vec{r}(t_f) = (x(t_f), y(t_f), z(t_f))$.

Definiamo (vettore) **spostamento** tra l'inizio e la fine il vettore $\vec{s} = \vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i) = \Delta\vec{r}$.
Ovviamente $\vec{r}(t_f) = \vec{r}(t_i) + \vec{s} = \vec{r}(t_i) + \Delta\vec{r}$.

Visto in termini delle componenti $\vec{s} = \left(x(t_f) - x(t_i), y(t_f) - y(t_i), z(t_f) - z(t_i)\right) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

Dal punto di vista vettoriale, se spostassimo l'origine nel punto iniziale, la posizione del punto finale è proprio il vettore spostamento. Il **vettore spostamento ha perciò come punto di applicazione il vettore posizione iniziale**.

Se la traiettoria è rettilinea senza cambio di verso (inversione del moto), il modulo di questo vettore spostamento ci fornisce esattamente il cammino percorso, altrimenti nel caso di traiettoria curva il modulo fornisce solo un'approssimazione per difetto del cammino effettivamente percorso (percorso blu della figura). Nel caso ci sia anche inversione del moto, ad esempio se il punto finale dopo un lungo giro coincide con quello inziale, lo spostamento è il vettore nullo (modulo zero) nonostante il cammino reale sia diverso da zero.



Sembrerebbe che l'utilizzo del vettore spostamento sia limitato alle traiettorie rettilinee, ma questo non tiene conto delle possibilità offerte dal concetto di limite che vedremo a breve.

4) Velocità media e velocità (istantanea)

Se il corpo si sposta da una posizione ad un'altra lo farà in un certo tempo. Definiamo come **velocità media** il rapporto incrementale $\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_f)-\vec{r}(t_i)}{t_f-t_i} = \frac{\vec{s}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ ovvero il rapporto tra lo spostamento e il tempo in cui avviene questo spostamento nello spazio (Δt lo "spostamento in tempo").

Dimensionalmente, essendo il rapporto tra una lunghezza e un tempo ha unità di misura m/s.

La definizione apparentemente è come il rapporto incrementale che abbiamo introdotto precedentemente, ma questo coinvolge una quantità vettoriale mentre nell'introduzione al corso avevamo la differenza di numeri reali.
Consideriamo però l'operazione di dividere per ciascuna delle coordinate
$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t})$.

Per ciascuna coordinata, vi è il rapporto incrementale corrispondente tra numeri reali e quindi operando sulle coordinate (rappresentazione analitica del vettore) si può procedere in modo identico a quanto fatto nell'introduzione sulle funzioni.

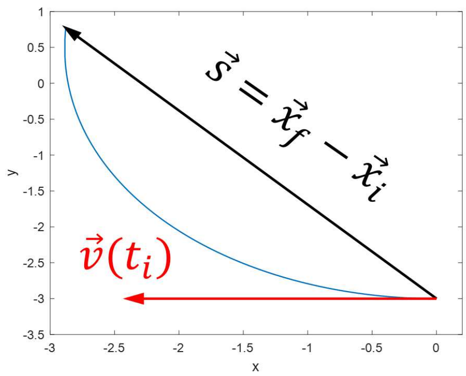
Lo spostamento su traiettorie non rettilinee e senza inversione di moto non rappresenta il cammino effettivamente percorso perciò la velocità media ha un significato di utilità limitata. Ci fornisce approssimativamente quanto rapidamente la posizione cambia in un intervallo di tempo.

Facendo il limite per $\Delta t \to 0$ si definisce la velocità istante per istante (cioè istantanea ma questo aggettivo non si usa in Fisica, **la velocità è solo quella istantanea** e non serve scriverlo).

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t})$$

L'ultimo passaggio definisce il processo di limite su ciascuna coordinata che è quello che utilizziamo per operare effettivamente sulle leggi orarie calcolando la derivata rispetto al tempo.

Esempio: in 2D siano date le leggi orarie $x(t) = 2t^3 - 3\ \sin 4t$ e $y(t) = 5t^2 - 3\ \cos 4t$. La traiettoria è la curva blu della figura. La velocità media tra gli istanti $t_i = 0\ s$ e $t_f = \frac{\pi}{8}\ s$ è $\vec{v}_m = (\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t})$ con



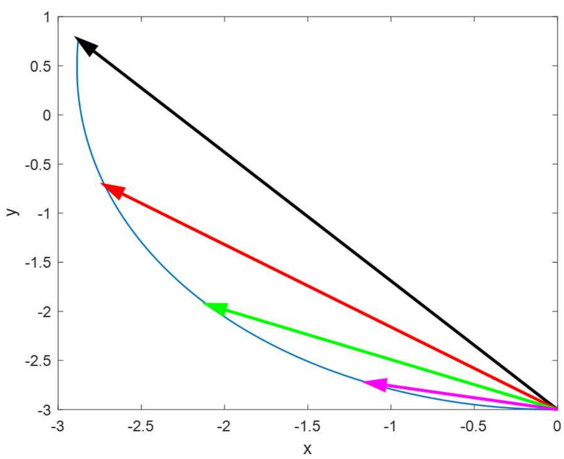
$\Delta x = x(t_f) - x(t_i) = [2\left(\frac{\pi}{8}\right)^3 - 3\sin(\frac{\pi}{2})] - 0 = 2\left(\frac{\pi}{8}\right)^3 - 3 = -2.8789\ m$ e

$\Delta y = y(t_f) - y(t_i) = [5\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 - 3\cos(\frac{\pi}{2})] + 3 = 5\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 + 3 = 3.7711\ m$, spostamento $\vec{s} = (\Delta x, \Delta y)$ vettore nero,

$\Delta t = t_f - t_i = \frac{\pi}{8}$ s da cui $\vec{v}_m = (-7.3310,\ 9.6026) m/s \approx (-7.3, 9.6)\frac{m}{s}$ (2 cifre significative), vettore parallelo a $\vec{s}$.

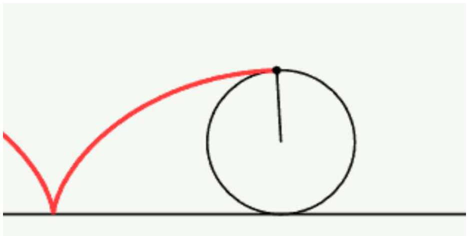
La velocità $\vec{v}(t_i) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (6t^2 - 12\cos 4t\, , 10t + 12\sin 4t)$ e all'istante t_i vale $\vec{v}(0) = (-12{,}0)\ m/s$, vettore rosso.

Dal punto di vista sintetico, possiamo vedere nella figura che avvicinando il punto finale a quello iniziale, il vettore spostamento (nero, rosso, verde, magenta) tende a diventare il vettore tangente alla traiettoria: la velocità ha la **proprietà di essere tangente alla traiettoria** nel punto in cui viene calcolata.



In conclusione si può dire che la **velocità** (vettore) **è la derivata rispetto al tempo della posizione** (vettore) di un corpo $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ e a sua volta dipenderà dal parametro tempo $\vec{v}(t)$.

Osserviamo che la tangenza del vettore velocità avviene nello spazio x, y, z ed è calcolata partendo dalle derivate che forniscono la tangente per le tre leggi orarie ma queste 3 tangenti non sono direttamente legate a questa tangente geometrica nel senso che non si può disegnare la velocità tangente sulle 3 curve orarie delle coordinate. Infatti queste curve sono disegnate nei 3 piani (t, x), (t, y) e (t, z) e i valori delle 3 derivate forniscono i valori delle 3 coordinate della velocità nello spazio fisico x, y, z.



Abbiamo prima incontrato il caso del moto del punto sulla ruota che rotola la cui traiettoria è la linea rossa. Si vede che la curva ha un punto angoloso, in tal caso arrivando da tempi prima di questo punto la tangente (e quindi la direzione della velocità) è diversa da quella immediatamente dopo: nel punto angoloso non esiste la tangente. Fisicamente la velocità nel punto angoloso si riduce a zero $\vec{v} = (0,0,0)m/s$ (lo vedremo trattando il moto di puro rotolamento) e per il vettore nullo non può essere definita nessuna direzione perché non possiamo calcolare il versore del vettore nullo (si otterrebbe $(\frac{0}{0}, \frac{0}{0}, \frac{0}{0})$). Quindi se esistono punti angolosi sulle traiettorie, la velocità necessariamente deve essere nulla in quei punti.

5) Accelerazione media e accelerazione (istantanea)

Analogamente al caso precedente se il corpo si sposta da una posizione ad un'altra possiederà una velocità differente nelle varie posizioni che dipendono dal tempo.

Definiamo come **accelerazione media** il rapporto incrementale $\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_f)-\vec{v}(t_i)}{t_f-t_i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ ovvero il rapporto tra l'incremento della velocità e il tempo in cui avviene questa variazione. Per la posizione si definisce lo spostamento $\vec{s} = \Delta\vec{r}$, per la velocità, la quantità $\Delta\vec{v}$ non ha un nome particolare, è solo l'incremento di $\vec{v}$.

Facendo il limite per $\Delta t \rightarrow 0$ si definisce l'accelerazione istante per istante (cioè istantanea ma questo aggettivo non si usa in Fisica, **l'accelerazione è solo quella istantanea** e non serve scriverlo).

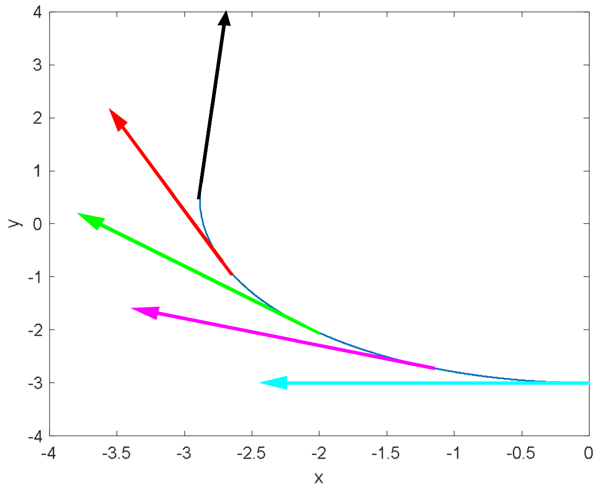
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \frac{\Delta v_z}{\Delta t})$$

L'ultimo passaggio definisce il processo di limite su ciascuna coordinata che, come per la velocità, è quello che viene utilizzato per calcolare la derivata rispetto al tempo.

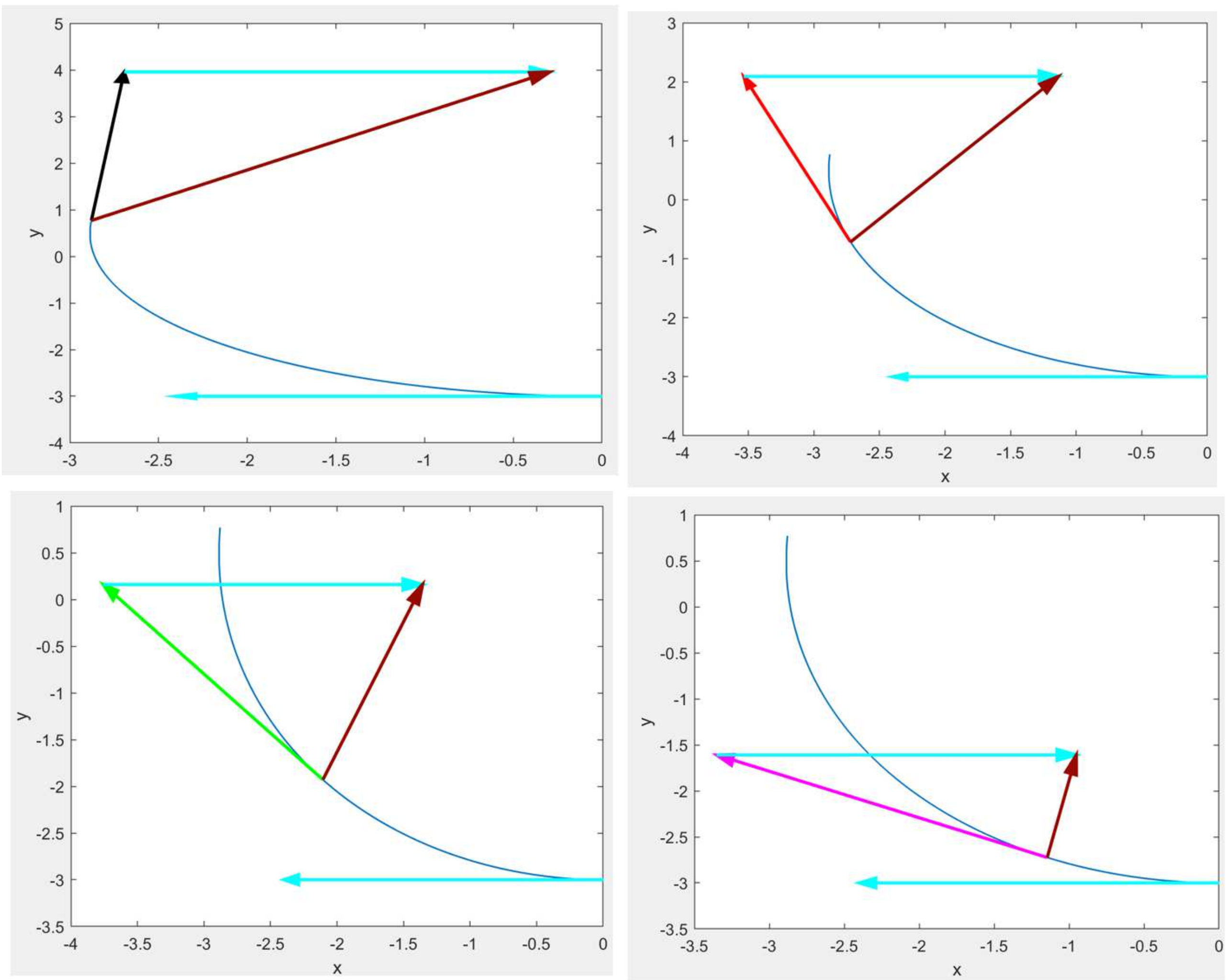
Da quanto fatto, l'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

La velocità a sua volta è la derivata della posizione rispetto al tempo, l'accelerazione è perciò la derivata seconda della posizione rispetto al tempo $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Ovviamente tutte le derivate sono calcolate sulle leggi orarie delle coordinate.

Dimensionalmente l'accelerazione è il rapporto di una velocità su un tempo (o di una lunghezza su un tempo al quadrato) e quindi ha unità di misura m/s^2.



Dal punto di vista sintetico, l'accelerazione non ha una ben definita posizione rispetto alla traiettoria però avvicinando il punto finale a quello iniziale, il vettore $\Delta\vec{v}$ tende a **puntare verso l'interno della concavità della traiettoria**.
In figura sono mostrate le velocità calcolate per t_i (vettore ciano) e t_f (vettore nero) e altri 3 punti intermedi. Se si esegue la differenza tra un vettore e il vettore (corrispondente a t_i) si ottengono i vettori mostrati in figura dove il vettore marrone rappresenta $\Delta\vec{v}$ ovvero la somma di $\vec{v}(t) + (-\vec{v}_i)$.



Si può osservare che il vettore differenza punta sempre verso la concavità della traiettoria.
L'accelerazione è perciò scomponibile in 2 componenti: il componente (maschile per indicare il vettore e non la componente numero reale) parallelo alla velocità, **accelerazione tangenziale** $\vec{a}_t$, e

il componente perpendicolare alla velocità che punta verso la concavità della traiettoria, **accelerazione radiale** $\vec{a}_r$ che viene anche chiamata **accelerazione centripeta** $\vec{a}_c$.

L'accelerazione complessiva è perciò $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$ con $\vec{a}_t \perp \vec{a}_c$ (infatti se moltiplichiamo scalarmente per il versore della velocità $\hat{v} \bullet \vec{a}_c = \hat{v} \bullet (\vec{a} - \vec{a}_t) = a_t - a_t = 0$).

Analisi e classificazione dei moti

I moti possono essere raggruppati a seconda dei valori presi da velocità e accelerazione oppure dalla forma della traiettoria.
Dal punto di vista cinematico, si parla di un moto **uniforme** quando la velocità è costante, **uniformemente accelerato** se l'accelerazione è costante, moto **vario** se non c'è costanza di velocità e/o accelerazione.
La forma della traiettoria porta al moto **rettilineo** se avviene su una retta, moto **circolare** se la traiettoria è una circonferenza. Mettendo insieme le due descrizioni si parlerà di moto **rettilineo uniforme** se il moto ha per traiettoria una retta e velocità costante, oppure di moto **rettilineo uniformemente accelerato** se ha traiettoria rettilinea e accelerazione costante.

Se la traiettoria è circolare e la velocità ha modulo costante (non può anche avere direzione costante altrimenti sarebbe un moto rettilineo come vedremo nel seguito) il moto è **circolare uniforme**.

Questi moti hanno particolare rilevanza e cerchiamo ora di legarli al comportamento dell'accelerazione.

i) Il **moto uniforme** ha accelerazione nulla e ciò implica $\vec{v}$ costante e quindi la direzione rimane costante.

La traiettoria è perciò proprio la direzione (o parte di essa) del vettore velocità. Scegliendo un asse di riferimento lungo la direzione (ad esempio asse x) possiamo ridurre la descrizione del moto ad un moto in una dimensione → non serve una notazione vettoriale esplicita perché ci troviamo lungo l'asse x e v_x è costante: dalla definizione $v_x = \frac{dx}{dt}$ possiamo integrare nel tempo la velocità ottenendo $x = x_i + \int v_x dt = x_i + v_x \int dt = x_i + v_x t$ in cui la costante di integrazione è la posizione iniziale del moto.

Più correttamente $x = \int_{t_i}^{t} v_x dt = v_x(t - t_i) + x_i$ ma se scegliamo l'inizio del tempi $t_i = 0$ si ritorna alla formulazione più semplice di prima. In generale l'istante iniziale viene scelto arbitrariamente e la scelta $t_i = 0$ è quella più conveniente, nel caso non si possa fare bisogna ricordarsi che le formule più semplici riguardano un intervallo di tempo e quindi basta sostituire t con $t - t_i$. Noi nel seguito supporremo che $t_i = 0$. Inoltre, anche la posizione iniziale del moto x_i potrebbe essere annullata scegliendo (se possibile) l'origine dell'asse di riferimento proprio in x_i.

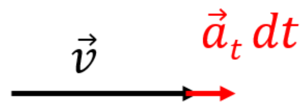
Se scegliamo il sistema di riferimento senza porre un asse lungo la direzione della velocità avremo il vettore costante (cioè tutte le componenti sono costanti) $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e possiamo trovare la posizione $\vec{r}$ integrando il vettore velocità componente per componente
$\vec{r}_i + \int \vec{v}dt = (x_i, y_i, z_i) + \left(\int v_x dt\,, \int v_y dt\,, \int v_z dt\right) = (x_i + v_x t, y_i + v_y t, z_i + v_z t)$.

Questa scrittura **generalizza al caso vettoriale l'operazione di integrazione**: si opera su ciascuna coordinata che è una funzione reale del tempo.

Il risultato riscritto in termini vettoriali fornisce $\vec{r} = \vec{r}_i + \vec{v}t$ che è l'equazione parametrica della retta di vettore direzionale $\vec{v}$ passante per il punto iniziale e parametro il tempo t.

ii) Consideriamo un moto **uniformemente accelerato**.

Se il moto parte da **velocità iniziale nulla o con velocità parallela all'accelerazione** non c'è cambio di direzione, il moto è rettilineo nella direzione dell'accelerazione. Infatti approssimando la derivata col rapporto incrementale $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \cong \vec{a}$ scriviamo in modo approssimato $\Delta\vec{v} \cong \vec{a}\,\Delta t$ (passando al limite si avrebbe $d\vec{v} = \vec{a}dt$) ovvero $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}\Delta t$ e poiché $\vec{v}_i$ è parallelo ad $\vec{a}$, $\vec{v}_f$ è ancora nella stessa direzione di $\vec{v}_i$ e $\vec{a}$. Il vettore $\vec{v}_i$ viene allungato (accelerazione) o accorciato (decelerazione) ma non cambia la direzione (al più può cambiare il verso).



Se $\vec{v}_i = \vec{0}$, il moto avviene nella direzione (e verso) di $\vec{a}$.

Iniziamo dal caso in cui la traiettoria è rettilinea e scegliamo l'asse di riferimento in questa direzione. Essendo $\vec{a}$ costante, la scelta dell'asse porta a considerare la sola componente a_x. Integrando $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ nel tempo si ottiene la velocità $v_x = \int a_x dt = a_x t + v_{xi}$ con costante di integrazione la velocità iniziale. Integriamo una seconda volta $x = \int v_x dt = \int (a_x t + v_{xi}) dt = \int a_x t dt + \int v_{xi} dt = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{xi} t + x_i$.

La legge oraria è quadratica nel tempo ma la traiettoria è rettilinea.

Osserviamo che ponendo $a_x = 0$ si riottiene la relazione del moto uniforme.

In appendice vi sono alcune relazioni cinematiche utili che si possono ricavare da queste relazioni.

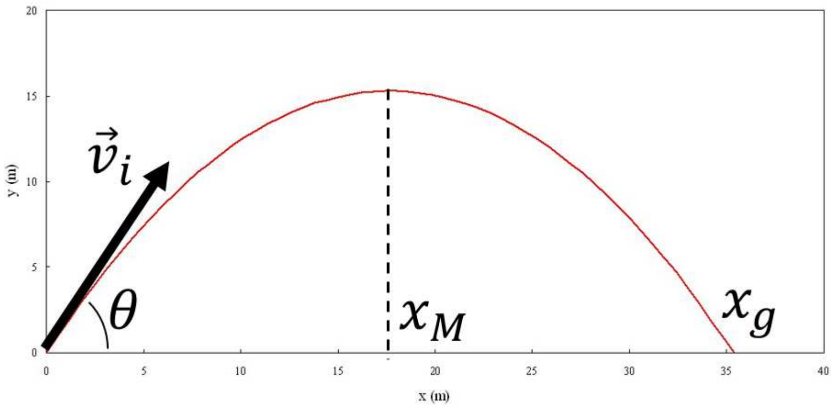
Se la **velocità iniziale non è parallela all'accelerazione**, il moto avverrà nel piano che contiene $\vec{v}_i$ e $\vec{a}$. Separando la velocità nei due componenti parallelo $\vec{v}_\parallel$ e perpendicolare $\vec{v}_\perp$, il componente perpendicolare non viene modificato e in quella direzione il moto è uniforme, nella direzione di $\vec{v}_\parallel$ e $\vec{a}$ il moto è accelerato.

Questo tipo di moto è il <u>moto del proiettile</u> lanciato con un angolo rispetto all'orizzontale in presenza di accelerazione verticale di gravità $\vec{g}$.

Nel piano della traiettoria del proiettile, scegliamo l'asse x orizzontale e l'asse y verticale con origine nel punto di partenza del proiettile. Ovviamente l'ipotesi è che si possa trascurare la curvatura della Terra e quindi per un moto di estensione limitata rispetto al raggio della Terra, in tal caso la superficie terrestre è approssimabile con un piano e in questo piano giace l'asse x.

Se il proiettile viene lanciato con velocità inziale $\vec{v}_i = \left(v_{xi}, v_{yi}\right)$ che forma un angolo θ con l'orizzontale $v_{xi} = v_i\,\cos\theta$ e $v_{xi} = v_i\,\sin\theta$.
Moto lungo x: $a_x = 0$, la velocità è costante $v_x = v_{xi} = v_i\,\cos\theta$, $x = v_x t = v_i\,\cos(\theta)\,t$
Moto lungo y: $a_y = -g$ costante, moto uniformemente accelerato $v_y = a_y t + v_{yi} = -gt + v_i \sin\theta$, $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{yi}t = -\frac{1}{2}gt^2 + v_i\,\sin(\theta)\,t$.

Eliminiamo il tempo $t = \frac{x}{v_i\,\cos\theta}$ e sostituiamo nella seconda legge oraria $y(x) = -\frac{1}{2}g(\frac{x}{v_i\,\cos\theta})^2 + v_i\,\sin(\theta)\frac{x}{v_i\,\cos\theta}$, otteniamo una parabola rivolta in basso $y(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{{v_i}^2\,(\cos\theta)^2}x^2 + \tan(\theta)\,x$.



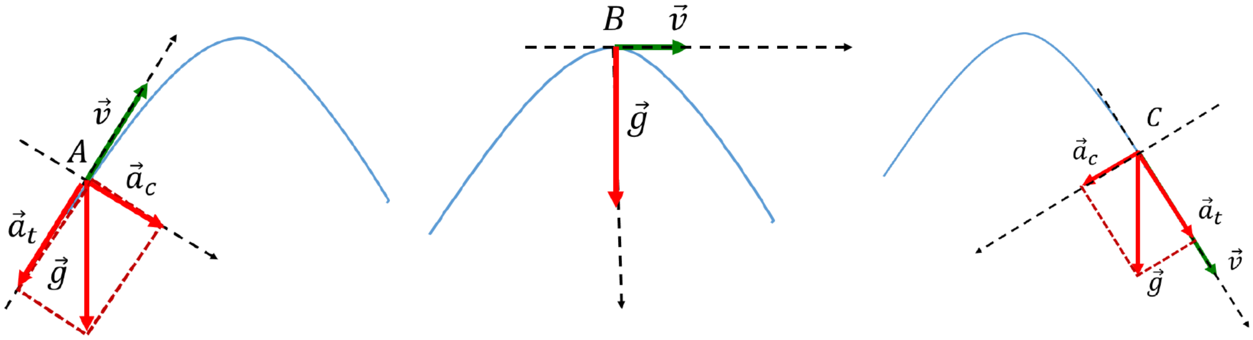
La posizione del massimo x_M (vertice della parabola) si ottiene annullando la derivata $\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{{v_i}^2\,(\cos\theta)^2}x + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0 \rightarrow x_M = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{{v_i}^2\,(\cos\theta)^2}{g} = \frac{{v_i}^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\frac{{v_i}^2}{g}\sin(2\,\theta)$.

La posizione dove il proiettile ritorna a terra, la gittata x_g, si ottiene annullando la traiettoria $y(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{{v_i}^2\,(\cos\theta)^2}x^2 + \tan(\theta)\,x = 0$ che ha 2 soluzioni, la prima è il punto di partenza $x = 0$ la seconda $-\frac{1}{2}\frac{g}{{v_i}^2\,(\cos\theta)^2}x + \tan(\theta) = 0 \rightarrow x_g = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{2\,{v_i}^2\,(\cos\theta)^2}{g} = 2\frac{{v_i}^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{{v_i}^2}{g}\sin(2\,\theta) = 2x_M$.
La parabola è infatti simmetrica rispetto alle due radici e quindi il punto del massimo è a metà fra 0 e x_g.

Osserviamo che tale moto parabolico avviene ogniqualvolta c'è accelerazione costante (e la velocità non è inizialmente nulla o parallela ad $\vec{a}$) e non è quindi peculiare del moto nella gravità. Anche una carica elettrica in un campo elettrico uniforme avrà, per le stesse condizioni iniziali, un moto parabolico.

Sopra abbiamo proiettato la velocità nella direzione di $\vec{a}$ che è un vettore costante. Se invece consideriamo i componenti dell'accelerazione (tangenziale e radiale centripeta proiettando nella direzione della velocità) poiché la velocità in generale cambia in direzione (e modulo), questi componenti variano mantenendo la somma costante, cioè $\vec{g}$ (vedi figura successiva).

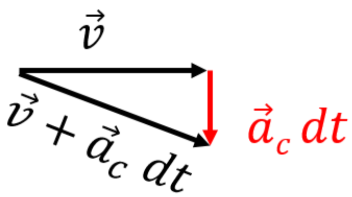
Possiamo però domandarci quanto vale l'accelerazione tangenziale e quella centripeta nei vari punti della traiettoria parabolica. Consideriamo il punto di massimo, la velocità è orizzontale (il proiettile ha concluso il moto di salita lungo y $v_y = 0$, mentre mantiene costante la velocità v_{xi}) e l'accelerazione complessiva è verticale sono quindi sono due vettori ortogonali → nel vertice della parabola l'accelerazione ha solo componente radiale centripeto (figura centrale).



In un punto generico dovremmo utilizzare la procedura di proiettare un vettore su un altro vista nell'introduzione. Vediamola brevemente. Scelto un tempo t a questo corrisponde una posizione $\vec{r}(t)$ (o equivalentemente scelto un punto della traiettoria $\vec{r}$ viene determinato il parametro t corrispondente da cui ricavare le altre quantità). Per questo istante sono conosciute anche la velocità $\vec{v}(t)$ e l'accelerazione $\vec{a}(t)$. Per semplicità di notazione non scriveremo nel seguito la dipendenza dall'istante.
La prima operazione è generare il versore di $\vec{v}$ che è tangente alla traiettoria (uno sviluppo in coordinate polari che porta al versore tangente verrà fatto nel seguito) $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}$.
La seconda operazione è la proiezione dell'accelerazione in direzione tangente trovando prima la componente e poi il componente tangenziale: $\vec{a} \bullet \hat{v} = a_t$ e poi $\vec{a}_t = a_t \hat{v}$.
La terza operazione è la sottrazione del vettore tangenziale dall'accelerazione complessiva per ottenere l'accelerazione centripeta: $\vec{a}_c = \vec{a} - \vec{a}_t$.
Ultima operazione di interesse potrebbe essere trovare il modulo dell'accelerazione centripeta a_c.

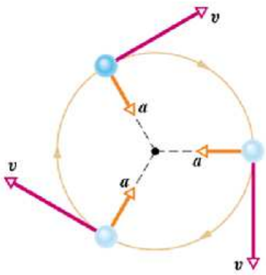
Abbiamo già visto che **il componente dell'accelerazione parallelo alla velocità (accelerazione tangenziale) modifica il modulo del vettore velocità** senza cambiare la direzione.

Invece **il componente radiale centripeto modifica la direzione senza variare il modulo**.



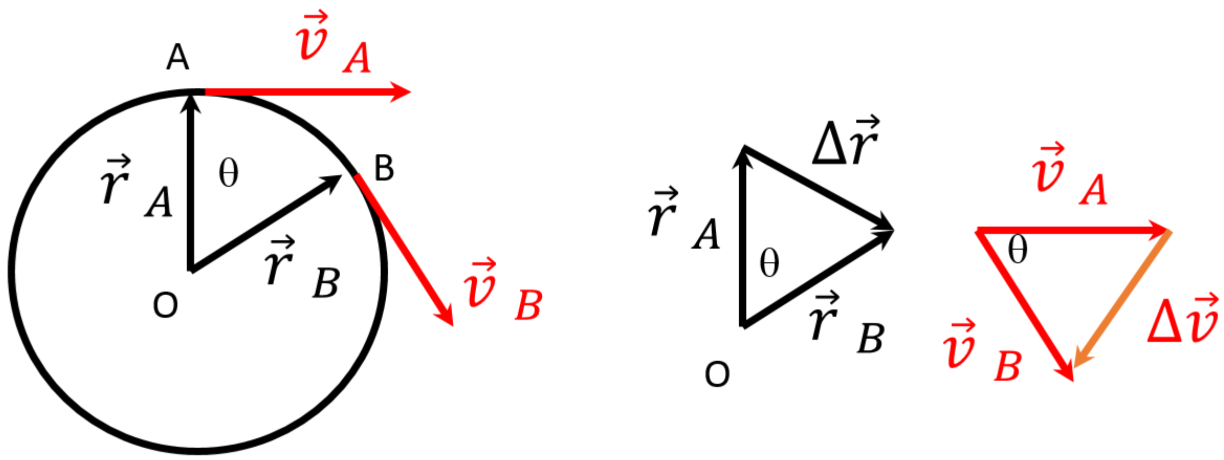
Infatti nella costruzione geometrica il risultato della velocità sommata all'incremento perpendicolare è l'ipotenusa del triangolo (modulo della velocità finale) $v_f = \sqrt{{v_i}^2 + (a\,\Delta t)^2} = v_i\sqrt{1 + \frac{(a\,\Delta t)^2}{{v_i}^2}}$ il termine $\frac{(a\,\Delta t)^2}{{v_i}^2}$, nel limite per $\Delta t \to 0$, risulta trascurabile rispetto a 1 e quindi $v_f \to v_i$ e istante per istante $v_f = v_i$.

iii) Moto circolare



Nel caso l'accelerazione costante sia sempre perpendicolare alla velocità, cioè l'accelerazione è solo radiale centripeta, il moto risultante è circolare uniforme, cambia la direzione della velocità ma il modulo non cambia. In figura sono mostrate 3 posizioni differenti di un punto materiale. Risulta evidente il nome dell'accelerazione radiale centripeta che giace in direzione radiale e punta verso il centro della traiettoria circolare.

Se proviamo a considerare la velocità in 2 punti differenti della traiettoria e calcoliamo in modo sintetico l'accelerazione media otteniamo $\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$. La variazione di velocità può essere rappresentata dal triangolo rosso isoscele di lati con lunghezza $v_A = v_B$. Per quanto riguarda le posizioni corrispondenti, lo spostamento e le posizioni formano un secondo triangolo (nero) isoscele ($r_A = r_B$). Poiché le posizioni (raggi) sono perpendicolari alle velocità che sono tangenti alla traiettoria, i due triangoli risultano simili e quindi $\Delta v \colon \Delta r = v_A \colon r_A$



Nel limite per $\Delta t \to 0$, ovvero $B \to A$, la corda Δr si confonde con la lunghezza dell'arco AB, $l_{AB} = r_A\theta \to \Delta v\, r_A = \Delta r\, v_A \to \Delta v\, r_A \cong l_{AB} v_A = r_A\theta\, v_A \to \Delta v \cong \frac{l_{AB} v_A}{r_A}$. D'altra parte il corpo si muove con velocità costante in modulo da cui $l_{AB} = v_A \Delta t \to \Delta v \cong \frac{v_A \Delta t\, v_A}{r_A} \to a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cong \frac{{v_A}^2}{r_A}$, nel limite il risultato diviene esatto e il **modulo dell'accelerazione radiale centripeta** vale $a_c = \frac{v^2}{r}$ costante in ogni punto della traiettoria (il vettore però varia in direzione).

Un'informazione più completa si ottiene considerando un sistema di riferimento xy (passiamo in rappresentazione analitica) cosicché la posizione di un punto è $P = (r\ \cos\theta\,, r\ \sin\theta)$.
Se l'angolo θ è una funzione del tempo e r è costante, il punto si muoverà descrivendo la traiettoria circolare, in particolare se è una funzione crescente del tempo la rotazione sarà antioraria.

Osserviamo che, assunte r, θ come coordinate (polari), queste coordinate permettono di individuare la posizione di un qualunque punto del piano. Nel nostro caso, in cui $r = cost$, il solo angolo permette di trovare univocamente la posizione del punto sulla traiettoria circolare invece le coordinate x,y variano entrambe al variare della posizione di P: le coordinate polari semplificano la descrizione del moto circolare.

Introduciamo la notazione puntata che vuol dire derivata rispetto al tempo: derivata di $f(t)$ è $\frac{df}{dt} = \dot{f}$, derivata seconda rispetto al tempo $\frac{d^2f}{dt^2} = \ddot{f}$, etc..
Possiamo scrivere separando le coordinate
Posizione $\begin{cases} x = r\ \cos\theta \\ y = r\ \sin\theta \end{cases}$ effettuando la derivata r è costante ma per le funzioni trigonometriche si ha la derivata di funzione di funzione $\frac{d(\cos\theta)}{dt} = -\sin(\theta)\,\dot{\theta}$ e $\frac{d(\sin\theta)}{dt} = \cos(\theta)\ \ \dot{\theta}$ da cui
Velocità $\begin{cases} \dot{x} = -r\ \sin(\theta)\dot{\theta} \\ \dot{y} = \ \ \ r\ \cos(\theta)\dot{\theta} \end{cases}$ derivando ancora una volta essendo presenti prodotti di funzioni del tempo questi danno luogo alla somma di due termini
Accelerazione $\begin{cases} \ddot{x} = -r\ \ [\cos(\theta)\ \dot{\theta}]\ \dot{\theta} - r\sin(\theta)\ddot{\theta} \\ \ddot{y} = \ r\ \ [-\sin(\theta)\ \dot{\theta}]\ \ \dot{\theta} + r\cos(\theta)\ddot{\theta} \end{cases}$

Ciascuno dei termini contiene le funzioni trigonometriche, analizziamo meglio. Se consideriamo il vettore di componenti $(\cos(\theta)\,, \sin(\theta))$ questo ha modulo 1: $(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1$ ed è quindi un versore. Possiamo scrivere la posizione come $\vec{r} = r\ (\cos(\theta)\,, \sin(\theta))$ ovvero $\vec{r} = r\hat{r}$ avendo introdotto il versore radiale $\hat{r} = \hat{e}_r = (\cos(\theta)\,, \sin(\theta))$. r rappresenta il modulo del vettore posizione.

La velocità contiene il versore $(-\sin(\theta), \cos(\theta))$ che da quanto abbiamo visto nell'introduzione per i vettori in 2D è perpendicolare a $\hat{r}$ e possiamo chiamarlo versore tangente $\hat{t} = \hat{e}_\theta$. Tale versore ci fornisce il verso positivo di crescita della coordinata angolare ed è ovviamente coincidente con il versore della velocità.
Possiamo scrivere $\vec{v} = r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ (usiamo questa notazione per non confondere $\hat{t}$ con il tempo) che ha modulo $v = r\dot{\theta}$.

L'accelerazione è formata da 2 parti:
$\vec{a}_1 = -r\dot{\theta}^2\hat{r}$ che ha verso opposto alla direzione radiale e quindi è diretto verso il centro della traiettoria circolare;
$\vec{a}_2 = r\ddot{\theta}\ \hat{e}_\theta$ che è tangente alla traiettoria e quindi le due parti sono tra loro perpendicolari e sono proprio il componente radiale centripeto $\vec{a}_c = \vec{a}_1$ e quello tangenziale $\vec{a}_t = \vec{a}_2$ definiti prima.

Osserviamo che gli assi x,y hanno versori $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ fissi (la derivata rispetto al tempo è nulla) mentre per le coordinate polari i due versori $\hat{r}, \hat{e}_\theta$ variano con la posizione e hanno derivata diversa da zero, però come coppia di versori ad un istante permettono di trovare le opportune coordinate.

Nelle relazioni compaiono le derivate di θ:
$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ è il limite di $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ che ci fornisce la rapidità di variazione dell'angolo col tempo, **velocità angolare**, spesso indicata da $\omega = \dot{\theta}$, con unità di misura rad/s;

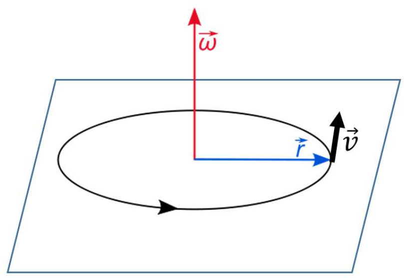
$\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$ derivata della velocità angolare ovvero l'**accelerazione angolare** indicata da α e con unità di misura rad/s^2.

Possiamo confrontare le quantità lineari unidimensionali x, v, a con quelle angolari θ, ω, α. Sono tutte legate dalla derivazione successiva rispetto al tempo e quindi, come per le prime, integrando otteniamo, se $\alpha = cost \rightarrow \omega = \alpha t + \omega_i \rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_i t + \theta_i$.
Il modulo dell'accelerazione centripeta può essere espresso in due modi $a_c = \omega^2 r = (\frac{v}{r})^2 r = \frac{v^2}{r}$.

Osserviamo che se la velocità è nulla (modulo uguale a zero), l'accelerazione centripeta è nulla e quindi alla partenza di un moto c'è solo accelerazione tangenziale.

Dato il legame tra angolo in radianti e lunghezza dell'arco $l = r\theta$, derivando questa relazione troviamo il legame tra modulo della velocità e velocità angolare (quello trovato prima) $v = r\omega$ e ancora derivando il modulo della velocità (e non tutto il vettore velocità) $a_t = r\alpha$ che è la componente che modifica solo il modulo della velocità.

Le quantità lineari sono dei vettori $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$, per le quantità angolari non è possibile definire il vettore legato agli angoli: (ad esempio la rotazione su due assi di rotazione che puntano in direzioni differenti nello spazio porta a posizioni finali differenti se si cambia l'ordine delle rotazioni (rotazione 1 e poi 2 oppure 2 e poi 1), questo rappresenterebbe la somma delle rotazioni e quindi la somma di angoli non è commutativa mentre tra vettori dovrebbe esserlo.



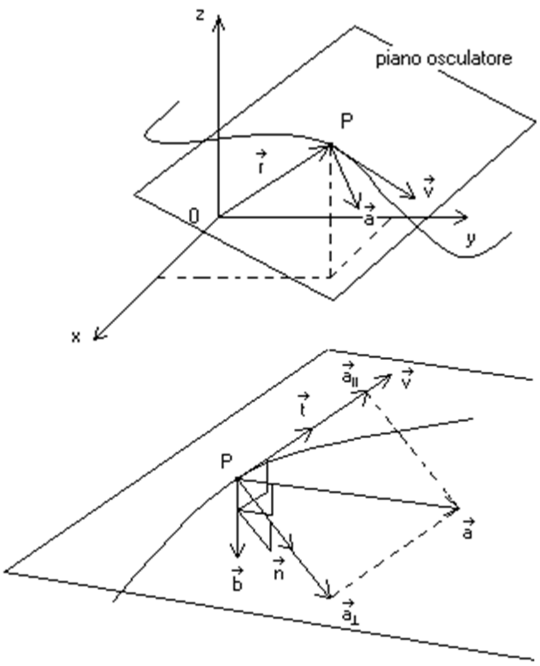
La commutatività si ha però per le velocità angolari ed è possibile definire il vettore velocità angolare che ha **direzione perpendicolare al piano della traiettoria e individua l'asse di rotazione** che passa per il centro della circonferenza per cui la velocità è data da $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. In tal caso si applica la regola della mano destra: il pollice è il vettore $\vec{\omega}$ e le dita si richiudono fornendo $\vec{v}$.
Derivando $\vec{\omega}$ si ottiene il vettore accelerazione angolare $\vec{\alpha}$.

iv) Moto su una traiettoria generica

Abbiamo trattato 2 moti semplici, moto rettilineo e circolare, ma in generale le curve associate alle traiettorie sono di forma più complessa e quindi sembrerebbe che quanto fatto per il moto circolare sia di limitata applicazione. Dimostriamo ora che ciò non è vero partendo dal piano x,y.
Ricordiamo la proprietà geometrica che per 3 punti non allineati passa una circonferenza ed una sola.
Su una traiettoria curva generica fissiamo un punto B in cui vogliamo analizzare il moto e scegliamo un punto che lo precede A e un punto che lo segue C. Se A,B,C non sono allineati possiamo determinare una circonferenza che passa per B (e per A e C). Se facciamo avvicinare i punti A e C al punto B (A→B e C→B) la circonferenza si modifica nel processo di limite ma continua a passare per B e alla fine localmente approssima anche la vera traiettoria. Si può

pensare che il punto che si muove e passa per B si sta muovendo sulla circonferenza che approssima la vera traiettoria: tale circonferenza limite si chiama **circonferenza osculatrice**. Come tutte le circonferenze ha un centro e un raggio r_{osc}.
Il moto di un punto su una traiettoria generica è perciò istante per instante un moto su una traiettoria circolare a cui si può applicare quanto visto per il moto circolare a patto di sostituire r con r_{osc} e l'accelerazione centripeta punterà verso il centro della circonferenza osculatrice di quell'istante.
Nell'istante successivo, ovviamente, la circonferenza osculatrice sarà differente e bisogna ricalcolare il tutto.

Se nel limite i punti sono allineati non esiste la circonferenza osculatrice ma i punti sono localmente allineati e quindi la traiettoria è approssimabile con una retta (moto rettilineo).
Il termine localmente indica proprio il fatto che ciò vale attorno al punto di interesse B per una piccola regione (infinitesima): localmente rettilinea o localmente circolare con raggio r_{osc}.
L'allineamento avviene ad esempio in un punto di flesso in cui la concavità di una curva cambia e la traiettoria nel punto di flesso è localmente rettilinea.



In 3D la cosa è più complessa ma nel limite i tre punti A,B,C individuano un piano, il piano osculatore, in cui giace la circonferenza osculatrice e in questo piano si ripetono i ragionamenti precedenti.

Come fatto per le coordinate polari, nel piano osculatore si definiscono il versore tangente $\hat{t}$ e radiale tra loro perpendicolari. Inoltre si può definire il versore perpendicolare al piano osculatore (nella figura è quello associato a $\vec{b}$) il cui verso è definito dalla direzione del moto e che fornisce anche direzione e verso del vettore velocità angolare $\vec{\omega}$.

v) Moti unidimensionali con accelerazione non costante

Concludiamo con un cenno al fatto che le relazioni del caso unidimensionale anche presenti nell'appendice sono valide solo per moti con accelerazione costante.
Nel caso l'accelerazione sia non costante il metodo generale di integrazione, utilizzato prima anche nel caso di accelerazione costante, è quello che si deve usare.
Esempio: sia $a = Ae^{-kt}$, per trovare la velocità $v = \int adt + v_i = -\frac{A}{k}e^{-kt} + v_i$ e per trovare la posizione $x = \int vdt = \int \left(-\frac{A}{k}e^{-kt} + v_i\right)dt + x_i = \int -\frac{A}{k}e^{-kt}dt + \int v_i dt + x_i = \frac{A}{k^2}e^{-kt} + v_i t + x_i$ la cui forma è ben diversa da $x = \frac{1}{2}at^2 + v_i t + x_i$.

Esempio: sia $a = At^2$, per trovare la velocità $v = \int a dt + v_i = \frac{A}{3}t^3 + v_i$ e per trovare la posizione $x = \int v dt = \int (\frac{A}{3}t^3 + v_i)dt + x_i = \int \frac{A}{3}t^3 dt + \int v_i dt + x_i = \frac{A}{12}t^4 + v_i t + x_i$.

Appendice

Nel moto uniformemente accelerato con le opportune scelte del tempo iniziale si ha

1) $\boldsymbol{v = at + v_i} \rightarrow t = \frac{v - v_i}{a}$
2) $\boldsymbol{x - x_i = \frac{1}{2}at^2 + v_i t}$ sostituendo il tempo $x - x_i = \frac{1}{2}a(\frac{v-v_i}{a})^2 + v_i \frac{v-v_i}{a} = \frac{1}{2}\frac{(v-v_i)^2}{a} + v_i \frac{v-v_i}{a} \rightarrow$ $a(x - x_i) = \frac{1}{2}(v - v_i)^2 + vv_i - {v_i}^2 = \frac{1}{2}v^2 - vv_i + \frac{1}{2}{v_i}^2 + vv_i - {v_i}^2 = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}{v_i}^2$ da cui
3) $\boldsymbol{v^2 - {v_i}^2 = 2a(x - x_i)}$
4) Se il moto è uniformemente accelerato la velocità media $\boldsymbol{v_m} = \frac{\boldsymbol{x - x_i}}{\boldsymbol{t}} = \frac{\frac{1}{2}at^2 + v_i t + x_i - x_i}{t} = \frac{1}{2}at + v_i = \frac{1}{2}at + \frac{1}{2}v_i + \frac{1}{2}v_i = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v_i = \frac{1}{2}(v + v_i)$ da cui
5) $\boldsymbol{v_m = \frac{1}{2}at + v_i}$
6) $\boldsymbol{v_m = \frac{1}{2}(v + v_i)}$

Osserviamo che in generale la 5) e la 6) non sono valide per un moto vario $\vec{v}_m \neq \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{v}_i)$.