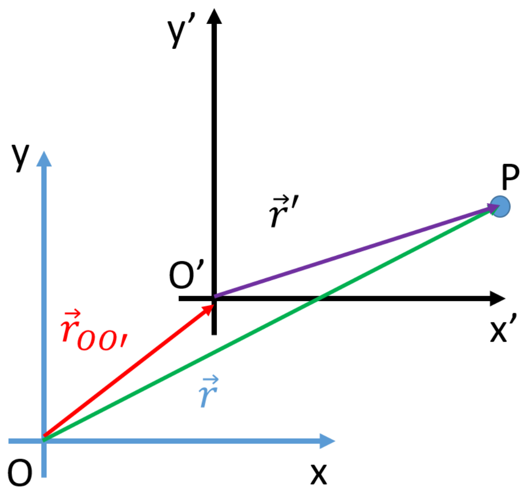
II PARTE: DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

1) Cinematica relativa

Abbiamo già osservato che quando si parla di moto occorre sempre definire il ***riferimento*** rispetto a cui si definisce il movimento.

In generale un osservatore definisce l'origine dei tempi (e quindi è dotato di un orologio che permette di misurare intervalli di tempo) e dal punto di vista spaziale definisce l'origine del sistema di riferimento e la direzione degli assi coordinati. Quando si parla di osservatore spesso si lo si identifica con il suo sistema di riferimento.

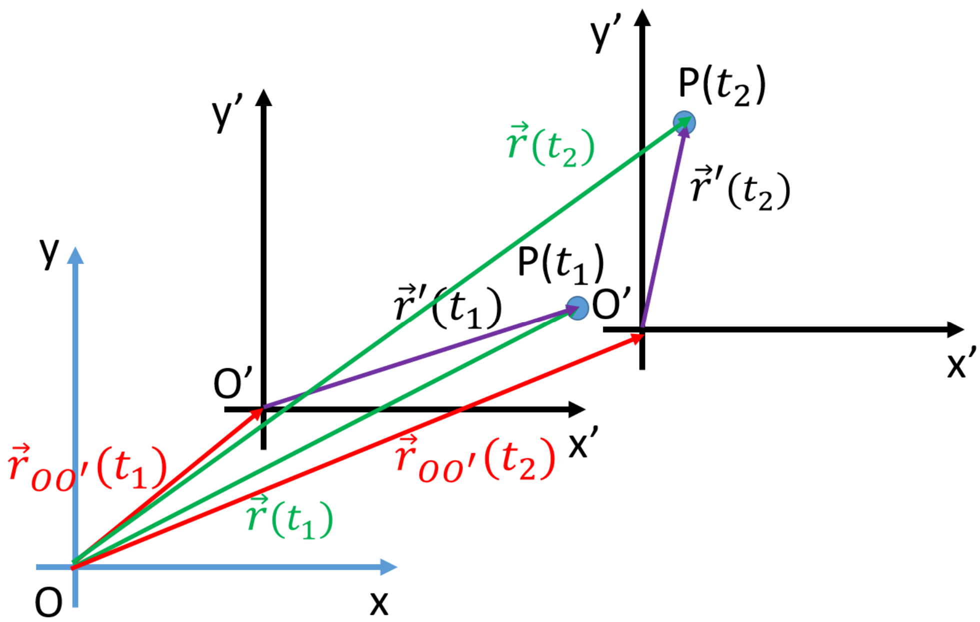
Consideriamo un primo osservatore con sistema di riferimento Oxyz.



Un secondo osservatore può essere in moto rispetto al primo osservatore e definisce un sistema di riferimento O'x'y'z'.

Per semplicità limitiamo la discussione a 2 assi coordinati xy e supponiamo pure che gli osservatori abbiano gli assi tra loro paralleli e che il secondo sistema trasli soltanto quindi mantenendo gli assi paralleli al primo.
Ad un certo istante t_1, i due osservatori hanno gli assi come in figura e la posizione del punto materiale P è $\vec{r}$ per il primo osservatore e $\vec{r}'$ per il secondo osservatore.

Definiamo il vettore $\vec{r}_{OO'}$ che fornisce la posizione dell'origine O' nel sistema di riferimento del primo osservatore. Tramite questo vettore possiamo porre in relazione le due posizioni nei due



sistemi di riferimento $\vec{r} = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}'$.
Al variare del tempo il sistema 2 e il punto materiale si spostano. Non essendoci rotazione del sistema 2, gli assi rimangono paralleli a sé stessi. Derivando la relazione delle posizioni otteniamo $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$ con $\vec{V}$ la

velocità del secondo sistema come vista dal primo sistema, detta anche **velocità di trascinamento,** ovvero $\vec{V} = \frac{d\vec{r}_{OO'}}{dt}$. Quindi i due osservatori misurano velocità differenti dello stesso punto materiale a causa della velocità di trascinamento del secondo osservatore.
Questa relazione tra le velocità fornisce anche la **legge di composizione delle velocità** e ci permette di trovare le velocità passando da un sistema ad un altro.

Derivando ancora una volta $\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}'$ con $\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ **l'accelerazione di trascinamento** del secondo sistema di riferimento rispetto al primo. Possiamo osservare che le accelerazioni nei due sistemi differiscono proprio per l'accelerazione di trascinamento e questo sarebbe vero anche nel caso di sistemi rotanti anziché in moto di sola traslazione.
Se il secondo sistema è in moto rettilineo uniforme (quindi $\vec{A} = 0$**) le accelerazioni misurate nei due sistemi risultano uguali** $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}'$**.**

Possiamo anche invertire i ruoli dei due sistemi e la posizione sarà $\vec{r}' = \vec{r}_{O'O} + \vec{r} = -\vec{r}_{OO'} + \vec{r}$, derivando $\vec{v}' = -\vec{V} + \vec{r}$, nella legge di composizione delle velocità la velocità di trascinamento è opposta a quella di prima.

Queste trasformazioni per:
posizione $\vec{r} = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}'$
velocità $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$
accelerazione $\vec{a} = \vec{a}'$
e $t = t'$ (tempo assoluto, scorre nello stesso modo nei due sistemi di riferimento).
vengono dette **trasformazioni di Galileo**. Esse sono valide per velocità molto inferiori alla velocità della luce altrimenti andrebbero sostituite dalle relazioni della relatività ristretta.

Le trasformazioni di Galileo possono essere applicate ai moti relativi.
Esempio: un aereo si muove rispetto all'aria con velocità di $360\ km/h$ verso Nord. Nello stesso periodo di tempo spira un vento verso Est alla velocità di $54\ km/h$, calcolare la velocità dell'aereo rispetto alla Terra.
Definito un sistema di riferimento con asse x verso Est e asse y verso Nord la velocità dell'aereo ha solo componente y di valore $360\frac{km}{h} = \frac{\frac{360}{3.6}m}{s} = 100\ m/s$ mentre la velocità dell'aria ha componente solo x di valore $54\frac{km}{h} = \frac{54}{3.6}\frac{m}{s}$ =15 m/s. Il primo sistema di riferimento è quello della Terra, il secondo è quello dell'aria. Nelle notazioni della dimostrazione $\vec{v}' = (0{,}100)m/s$ velocità aereo rispetto al sistema di riferimento dell'aria, $\vec{V} = 15\ m/s$ velocità di trascinamento dell'aria, $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' = (15{,}100)m/s$ velocità dell'aero rispetto al sistema di riferimento della Terra.

Esempio di un sistema di riferimento accelerato: Un ascensore sale con accelerazione costante $A = 1\frac{m}{s^2}$. L'ascensore è alto $h = 3\ m$,se la plafoniera delle luci si stacca e cade sul pavimento, quanto tempo impiega? Abbiamo il sistema di riferimento della Terra (asse verticale) e quello dell'ascensore con accelerazione A rispetto alla Terra verso l'alto, $A = +1\ m/s$. Rispetto alla Terra gli oggetti hanno accelerazione $\vec{g}$ verso il basso ovvero $\vec{a} = \vec{g}$ mentre l'accelerazione rispetto all'ascensore (dalla relazione $\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}'$) $a' = a - A = (-9.81 - 1)\frac{m}{s^2} = -10.81\ m/s^2$ e quindi integrando 2 volte $h = -\frac{1}{2}a't^2 \rightarrow t = \sqrt{-\frac{2h}{a'}} = 0.74501\ s \approx 0.75\ s$ (2 cifre significative).

2) Principi della dinamica

Abbiamo già accennato ai 3 principi su cui si fonda la Meccanica e che si chiamano anche leggi della Meccanica:

Primo principio o principio di inerzia o di Galileo: Un corpo mantiene il proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, finché una forza non agisce su di esso.

Secondo principio o principio di proporzionalità o principio di Newton: L'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale e ha la stessa direzione della **forza risultante** (o netta) agente su di esso, mentre è inversamente proporzionale alla sua massa.
A volte si chiama legge di Newton e si esprime con la relazione vettoriale $\vec{F} = m\vec{a}$.

Terzo principio o di azione e reazione: Per ogni forza (vettore) che un corpo A esercita su di un altro corpo B, ne esiste istantaneamente un'altra opposta (uguale in modulo e direzione, ma opposta in verso) causata dal corpo B che agisce sul corpo A. Questa si può esprimere con $\vec{F}_{A\rightarrow B} = -\vec{F}_{B\rightarrow A}$.

3) Analisi dei principi della dinamica

Il primo principio va contro la concezione che un corpo non soggetto ad azioni è in quiete, la concezione della Fisica prima di Galileo. Preso alla lettera sembrerebbe essere espresso dal secondo principio $\vec{F} = m\vec{a}$ perché se la forza e nulla si ha ovviamente $\vec{a} = (0,0,0)m/s^2$ da cui $\vec{v}$ è un vettore costante (che potrebbe anche essere nullo).
In realtà, il primo principio ci fornisce un metodo per definire un **sistema inerziale** ovvero **un sistema in cui valgono le leggi della Meccanica, in particolare il secondo principio**.
Infatti proviamo a leggerlo nel seguente modo: se osservo un corpo non soggetto ad azioni (o che la forza risultante sia nulla) e lo vedo in stato di quiete o di moto a velocità costante allora il mio sistema di riferimento è un sistema inerziale.
Se invece lo stesso corpo a risultante nulla lo vedo accelerare allora il mio sistema di riferimento non è inerziale.
Nel famoso esempio che fa Galileo del moto in una cabina di una nave che procede in modo uniforme, arriva alla conclusione che non ci si può accorgere del moto della nave perché tutto avviene come se la nave fosse ferma. Questo porta all'equivalenza della descrizione tra sistemi in moto relativo uniforme tra di loro per i quali, come abbiamo visto dal calcolo diretto della dinamica relativa, si misura la stessa accelerazione dei corpi osservati $\vec{a} = \vec{a}'$.

Il secondo principio, **valido nei sistemi inerziali**, ci fornisce la proporzionalità tra azione (forza con unità di misura newton N) ed accelerazione del corpo, introducendo la costante di proporzionalità massa (grandezza fondamentale, unità kg).
Viene perciò introdotto il concetto di forza che si dimostra essere vettoriale (se applico ad un corpo fermo una forza, il corpo parte nella direzione e verso di questa azione; se sommo più azioni queste verificano la regola del parallelogramma) e il concetto di massa (inerziale) che è invece una quantità scalare. La relazione del secondo principio ha perciò proprietà tensoriali definite (uguaglianza di tensori di ordine 1 o vettori) e questi vettori possono essere proiettati sui sistemi di riferimento che sceglieremo.
Come osservato prima, **in tutti i sistemi inerziali la legge si esprime $\vec{F} = m\vec{a}$** perché tutte le accelerazioni osservate sono uguali.
Nei sistemi di riferimento accelerati perciò il secondo principio non è valido.

Il terzo principio ci fornisce la natura dell'interazione: le forze tra corpi che interagiscono sono sempre a coppie, **non esiste una forza legata ad una interazione che sia singola**. Se un primo corpo sta applicando una forza ad un secondo corpo, la forza opposta è applicata dal secondo al primo corpo.
Dobbiamo sempre pensare ad una interazione come l'azione di un corpo su altro $A \to B$ (corpo A agisce e corpo B subisce) e questa interazione sommata ad eventuali altre azioni sul corpo B determina il moto di B (B subisce le azioni di tutti gli altri corpi con cui interagisce).
Ma se $A \to B$ è anche vero che $B \to A$ (terzo principio) e l'azione di B sommata alle altre interazioni su A determina il moto di A.
Ad esempio sono interessato al moto di B e so che interagisce con A e con C allora devo trovare la risultante $\vec{F}_{A\to B} + \vec{F}_{C\to B} = \vec{F}_B$ e applico la seconda legge per il corpo B $\vec{F}_B = m_B\vec{a}_B$.
Apparentemente ho solo le forze sul corpo B.
In realtà, se mi interessa il moto di A quali forze devo considerare? Sicuramente devo considerare l'interazione con B che stavolta è $\vec{F}_{B\to A}$ che per il terzo principio è opposta a $\vec{F}_{A\to B}$ più le altre interazioni di A con gli altri corpi (ad esempio C) per trovare la risultante $\vec{F}_A = \vec{F}_{B\to A} + \vec{F}_{C\to A} = -\vec{F}_{A\to B} + \vec{F}_{C\to A}$ poi la seconda legge $\vec{F}_A = m_A\vec{a}_A$.

Quindi non devo mai dimenticare che **l'interazione coinvolge sempre coppie di corpi**.

Esempio: la forza peso che si usa spesso per trattare l'attrazione di un corpo verso il centro della Terra non agisce solo sul corpo ma agisce anche sulla Terra (in verso opposto). Quando tratto il moto del corpo nella legge di Newton compare la massa del corpo per l'accelerazione del corpo e il suo peso. Questa forza però non nasce dal nulla, chi agisce è la Terra. Se voglio trattare il moto della Terra nella legge di Newton devo mettere la massa della Terra per l'accelerazione della Terra e l'opposto della forza peso del corpo (per il terzo principio), ovvero la forza applica dal corpo alla Terra.

Concludendo, un sistema di riferimento deve avere le seguenti proprietà:
- essere destrorso per verificare la regola della mano destra del prodotto vettoriale

- deve essere inerziale per rendere valida la legge di Newton.

4) Sistemi non inerziali

Il primo principio permette di verificare, osservando un corpo libero di muoversi senza azioni esterne, se il sistema di riferimento che uso è inerziale. Questo però non è facile e in generale non occorre che i sistemi di riferimento siano strettamente inerziali.
Infatti la Terra ruota su sé stessa e compie un moto di rivoluzione attorno al Sole e quindi ha un moto accelerato e se fissiamo un sistema di riferimento alla Terra questo non è inerziale.
Però se limitiamo le nostre osservazioni a periodi di tempo non troppo lunghi e per traiettorie brevi (anche per trascurare la curvatura della superficie terrestre), gli effetti di accelerazione sono abbastanza contenuti da potersi trascurare.
Se invece non fosse possibile trascurarli, è bene trattare brevemente cosa avviene nei sistemi non inerziali.
Dalla cinematica relativa abbiamo ottenuto che $\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}'$ e se $\vec{a}$ è l'accelerazione nel sistema inerziale possiamo scrivere $\vec{F} = m\vec{a}$ dove a primo membro ci sono tutte le azioni che agiscono sulla massa m dovete alle interazioni con altri corpi, sono interazioni reali.
Utilizzando la relazione cinematica del moto relativo $\vec{F} = m\vec{a} = m\,(\vec{A} + \vec{a}') = m\vec{A} + m\vec{a}'$ da cui si vede che $\vec{F} = m\vec{A} + m\vec{a}'$ e non semplicemente $\vec{F} = m\vec{a}'$. Quindi la dinamica nel sistema non inerziale non è dovuta solo alle interazioni con altri corpi ma anche al fatto che c'è l'accelerazione di trascinamento.

Osserviamo a questo punto che i due membri riguardano (inter)azioni da una parte dell'uguaglianza e massa per accelerazioni dall'altra, questa distinzione non va confusa: per trovare la risultante devo sommare i vettori forza e devono trovarsi tutti dalla stessa parte dell'equazione.

Dal punto di vista matematico posso spostare a primo membro l'accelerazione di trascinamento $\vec{F} - m\vec{A} = m\vec{a}'$ ma, poiché si trova dalla parte delle forze, $-m\vec{A}$ viene ad assumere una caratteristica di forza ma non dovuta ad interazioni con altri corpi. Queste azioni create dal moto accelerato del sistema di riferimento vengono dette **forze fittizie** (o **forze apparenti**) $\vec{F}_A = -m\vec{A}$ e la forma della legge di Newton nel sistema non inerziale assume la forma che ci aspettiamo $\vec{F} + \vec{F}_A = m\vec{a}'$ a patto di considerare queste forze apparenti.
Non essendo legate ad interazioni tra corpi, **alle forze apparenti non si applica il terzo principio**, sono forze inesistenti, che si percepiscono solo perché il sistema è accelerato.

Esempi: una mosca che vola in modo uniforme in un autobus che accelera in avanti viene vista come accelerata indietro dai passeggeri dell'autobus.
Quando si affronta una curva ci si sente proiettati contro le pareti esterne dell'auto: diciamo che questo è dovuto alla forza centrifuga ma è semplicemente il fatto che facendo una traiettoria curva occorre una accelerazione centripeta (come vista dal sistema inerziale fermo col terreno)

e quindi $\vec{F} = m\vec{a}_c$. Ma per chi sta in auto non c'è movimento e quindi occorre che le forze si annullino per mantenere la quiete ma da punto di vista dell'interazione c'è solo la parete dell'auto che interagisce con noi, a chi è dovuta la forza che annulla quella della parete? Riscriviamo $\vec{F} - m\vec{a}_c = \vec{0}$ ovvero $\vec{F} + \vec{F}_C = \vec{0}$ con $\vec{F}_C = -m\vec{a}_c$ avente verso opposto ad $\vec{a}_c$ e quindi centrifugo. La forza fittizia centrifuga agisce su tutti i corpi in tutti i sistemi rotanti se non ci troviamo sull'asse di rotazione.

Se il corpo fosse anche in movimento, nei sistemi rotanti vi è ancora la forza fittizia di Coriolis che spiega il movimento circolatorio delle correnti marine o dei venti su scala planetaria (non si può più considerare la Terra come un sistema inerziale).

Sebbene sia possibile fare calcoli descrivendo il moto utilizzando un sistema di riferimento non inerziale, questo richiede conoscenze più avanzate e nel corso non si farà ricorso a sistemi non inerziali se non in casi particolari.

5) Forze

Per un sistema di riferimento inerziale, nella legge di Newton compare la risultante delle forze reali. Queste forze reali possono essere separate in forze che agiscono a distanza (ad esempio la forza di gravità) e forze di contatto.

La **forza di gravitazione universale** che rappresenta l'interazione attrattiva tra 2 corpi puntiformi a distanza r aventi massa (gravitazionale) m_1 e m_2 si esprime lungo la congiungente i due corpi e vettorialmente si scrive come $\vec{F}_G = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$ avendo preso l'origine degli assi su un corpo (ad esempio 1) e il vettore $\vec{r}$ rappresenta la posizione relativa dell'altro corpo (corpo 2) rispetto al primo. G è la costante di gravitazione universale il cui valore nel S.I. è $6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}$, valore molto piccolo e quindi il modulo della forza gravitazione, sempre presente tra due corpi, è apprezzabile solo per corpi la cui massa (gravitazionale) per almeno uno dei due è sufficientemente grande.
Per esempio tra 2 corpi (puntiformi) di $10^3\ kg$ (1 tonnellata) a distanza di un metro il modulo vale $F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{10^3 10^3}{1} N = 6.67\ \cdot 10^{-5} N$ mentre la forza di attrazione con la Terra (vedi dopo) vale circa $10^4 N$ su ciascun corpo.
È bene precisare che in $\vec{F}_G = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$ avendo messo il corpo 1 nell'origine si sta valutando la forza che agisce sul corpo 2 dovuta al corpo 1: questa forza dipende dall'inverso del quadrato della distanza e il fatto che sia attrattiva è rappresentato dal segno meno, infatti il verso ha versa da 1 a 2, col segno meno la forza su 2 è verso il corpo 1.
Se si mette l'origine degli assi su 2 l'espressione rimane uguale ma cambia il significato di $\vec{r}$ che va da 2 a 1 quindi cambia il verso della forza e questo esprime il terzo principio di azione e reazione.
In altri termini il corpo che sta nell'origine è la sorgente della forza che agisce sull'altro corpo che la subisce, ad esempio 1 sorgente agisce su 2 ed è indicata da $\vec{F}_{G\,1\to 2}$, per il terzo principio scambiando il ruolo di sorgente $\vec{F}_{G\,2\to 1} = -\vec{F}_{G\,1\to 2}$.

Nel caso il corpo sorgente non si trovi nell'origine ma abbia posizione $\vec{r}_1$ e il corpo che subisce l'interazione sia in $\vec{r}_2$, la forza gravitazionale si scriverebbe pensando che il vettore di posizione relativa di 2 rispetto a 1 è dato da $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ovvero $\vec{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \widehat{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}$.

Per corpi di massa m che si trovano sulla superficie della Terra le variazioni di quota sono contenute (un areo vola fino a $11\ km$ di quota da confrontare con il raggio terrestre $R_T \sim 6400\ km \sim 6.4 \cdot 10^6\ m$) e quindi la distanza dal centro della Terra si può assumere costante e pari al raggio della Terra $\vec{F}_G \cong -G \frac{m_T m}{{R_T}^2} \hat{r}$ con m_T la massa della Terra e il versore diretto verso il centro della Terra. La relazione si può riscrivere $m \left(-G \frac{m_T}{{R_T}^2} \hat{r}\right) = m\vec{g}$ introducendo il vettore costante $\vec{g} = -G \frac{m_T}{{R_T}^2} \hat{r}$, l'accelerazione di gravità costante per tutti i corpi, da cui **la forza peso** $\vec{P} = m\vec{g}$, espressione solitamente utilizzata per l'interazione gravitazionale sulla superficie terrestre.

La quantità scalare m (massa gravitazionale), parametro che lega la forza all'accelerazione di gravità $\vec{g}$ (o più in generale che compare nella forza di attrazione gravitazionale universale), risulta sempre proporzionale alla massa inerziale, parametro che invece fornisce la resistenza di un corpo a far variare la sua velocità e che compare nella legge di Newton. Prendendo la costante di proporzionalità unitaria, le due masse hanno identico valore anche se esprimono effetti differenti.
Questa forza peso cambiata di segno è la forza che il corpo applica alla Terra con punto di applicazione nel centro della Terra.

Notiamo che le legge di gravitazione universale è valida per corpi puntiformi e quindi non sarebbe valida per la Terra e un corpo se le distanze non sono tali da poter applicare l'approssimazione di punto materiale. Si dimostrerà in Elettromagnetismo il **teorema di Gauss** valido anche nel caso gravitazionale: un corpo a simmetria sferica, per distanze superiori al suo raggio, genera un campo gravitazionale uguale a quello di un corpo puntiforme di uguali caratteristiche.

La Terra è approssimativamente di forma sferica e a simmetria sferica (cioè gli strati interni a diversa concentrazione e densità si distribuiscono in funzione della distanza dal suo centro) e quindi si può utilizzare questa approssimazione: ovviamente $\vec{g}$ non è un vettore con il modulo rigorosamente constante (la direzione è verso il centro della Terra e varia da punto sulla superficie circa sferica della Terra) ma noi assumeremo che il valore sia $g = 9.81\ m/s^2$.
Per una regione poco estesa della Terra, la curvatura terrestre non si nota e quindi il vettore $\vec{g}$ è sempre verticale orientato verso il basso e per quanto detto prima di modulo costante $g = 9.81\ m/s^2$.
Poiché il valore è vicino a 10 a volte, per una stima, si approssima con 10 quindi un corpo di massa m ha circa un peso di $(10 \cdot m)\ N$.

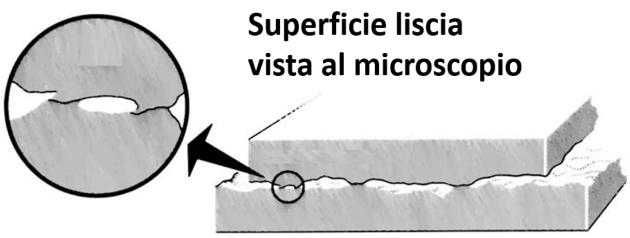
La forza tra due cariche elettriche q_1 e q_2 che sono i parametri dell'interazione al posto delle masse, è espressa da $\vec{F}_E = k_E \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$ che è la legge di Coulomb. La forma matematica è identica a quella gravitazionale essendoci la variazione con l'inverso del quadrato della distanza: questa è la caratteristica che permette la dimostrazione del teorema di Gauss.

Se un corpo non ha simmetria sferica bisogna separarlo in parti piccole (infinitesime) che sono "puntiformi" e si sommano le interazioni a coppie tra tutti i pezzetti dei due corpi per trovare la risultante.

Nella legge di Coulomb non c'è il segno meno perché la forza è sia attrattiva sia repulsiva, dipende dal segno del prodotto delle cariche: cariche uguali si respingono, cariche opposte si attraggono. Per il caso gravitazionale, il valore delle masse è essenzialmente positivo e c'è solo attrazione da cui il segno meno.

Osserviamo anche che la forza gravitazionale e la forza elettrica sono le forze che agiscono nella vita di tutti i giorni. La costante k_E è sufficientemente grande cosicché la forza elettrica è decisamente superiore a quella gravitazionale (si può vedere confrontando l'interazione tra cariche elementari come due protoni che hanno sia carica elettrica sia massa). D'altra parte gli effetti si notano poco perché i corpi sono essenzialmente neutri (uguaglianza delle cariche positive e negative che essi contengono, cioè ugual numero di protoni positivi e di elettroni negativi) e quindi nonostante sia una forza che agisce a distanza come quella gravitazionale e sia più intensa solo quando le distanze sono molto piccole gli effetti della forza elettrica sono apprezzabili. Questo giustifica il fatto che c'è interazione solo quando i corpi sono (macroscopicamente) a contatto e nella Meccanica verranno trattate in modo fenomenologico in questo ambito senza ricorrere alla trattazione esplicita della forza elettrica, argomento invece della parte di Elettromagnetismo.

Tra le forze di contatto, l'interazione con un piano di appoggio è quanto avviene più di sovente: i corpi sulla superficie terreste sono in genere appoggiati su qualcosa.
La deformazione microscopica del piano determina una forza sempre perpendicolare ed uscente dal piano applicata al corpo nel punto di contatto. Solitamente questa forza viene chiamata la forza normale del piano $\vec{N}$.
A livello microscopico nessuna superficie è liscia ma presenta delle asperità. La deformazione legata al contatto tra le superfici del piano porta alla formazione di ponti saldati fra le punte delle asperità che si toccano dalle due parti. Quando si cerca di far scivolare le due parti queste resistono e impediscono lo scorrimento delle superfici. Tale



forza tangenziale al piano è la forza di **attrito statico** f_S perché macroscopicamente non si nota movimento. In assenza di sollecitazione la forza di attrito statico è nulla, applicando una forza tangenziale le saldature vengono stirate nella direzione di sollecitazione e allungate

(microscopicamente): esse si oppongono al moto fino ad un valore massimo, la forza di attrito statico varia perciò da zero a un valore massimo che dipende dalla natura delle due superfici a contatto ed è proporzionale alla forza che spinge una superficie una superficie contro l'altra, ovvero alla forza normale. Oltre tale valore massimo le saldature si rompono e le superfici possono scorrere l'una sull'altra.
Il coefficiente di proporzionalità è il **coefficiente di attrito statico $\boldsymbol{\mu_S}$** e il modulo della forza di attrito statico è espressa dalla disuguaglianza $(0 \leq) f_s \leq \mu_S N$. La relazione è tra i moduli perché le forze normale e di attrito hanno direzioni tra loro perpendicolari e vettorialmente non possono essere proporzionali.
Superata la forza di attrito statico massima $\mu_S N$, l'interazione fra le asperità delle superfici porta all'attrito dinamico f_D la cui espressione è simile a quello statico ma espressa da un'uguaglianza $f_D = \mu_D N$ dove **$\boldsymbol{\mu_D}$ è il coefficiente di attrito dinamico**.
Un piano di appoggio è anche un vincolo al moto di un corpo. Infatti se il corpo è sempre a contatto con un piano si potrà muovere solo lungo in piano di appoggio e alla legge di Newton occorre aggiungere questa informazione che in genere si traduce nella scelta del sistema di riferimento inerziale con due assi coordinati lungo questo piano.

Poiché le microsaldature non possono formarsi quando le superfici scorrono risulta sperimentalmente che $\mu_D < \mu_S$, la forza di attrito dinamica è inferiore a quella massima statica. Ciò ha conseguenze importanti ad esempio nella tenuta di strada, non appena le ruote iniziano a strisciare il controllo dei veicoli non si riesce a riprendere perché l'attrito dinamico è inferiore a quello statico.

Riassumendo, l'interazione tra 2 superfici ha sia una componente normale sia una tangenziale (l'attrito che è proporzionale alla forza normale nel caso dinamico). L'attrito si oppone al moto e
i) se statico si oppone alla forza (risultante) lungo il piano di appoggio che sollecita il corpo (quindi ha stessa direzione e verso opposto)
ii) se dinamico è opposto alla velocità.
A volte la componente tangenziale (attrito) può essere trascurata e l'interazione da considerare col piano di appoggio è solo normale.

Poiché si parla di forze tra corpi "schiacciati" l'uno contro l'altro, è utile introdurre il concetto di pressione come il modulo della forza (normale) F_n che agisce su una superficie diviso per la superficie $p = \frac{F_n}{S}$ con unità nel S.I. pascal Pa.
Nel caso di un corpo appoggiato su un piano questa forza normale è proprio la reazione normale del piano di appoggio ma il concetto può essere esteso anche ai fluidi.
Proprio nel caso dei corpi solidi appoggiati, la superficie macroscopica di appoggio in realtà non corrisponde a quella effettiva delle asperità il cui valore è molto inferiore: il corpo si appoggia sulle asperità e sulle asperità la pressione raggiunge valori così elevati da giustificare le saldature a freddo.

La deformazione dei corpi comporta la nascita di una forza. Se la deformazione non è grande c'è proporzionalità tra deformazione e forza, **legge di Hooke**, ed il sistema è in regime lineare detto anche elastico, ovvero il sistema ritorna allo stato non deformato al termine della sollecitazione.
La **forza elastica** di una **molla ideale** (senza massa e a cui si può applicare qualunque forza e resiste a qualunque deformazione) è quindi espressa lungo la direzione della molla (assumiamo asse x) $F = -k(l - l_0)$ con l_0 la lunghezza a riposo e l la lunghezza attuale della molla: se allungata $l > l_0$, se compressa $l < l_0$. La deformazione è quindi $x = l - l_0$ e solitamente la relazione della componente viene scritta $F = -kx$.
La costante k è detta costante elastica della molla.

Il segno meno deriva dal fatto che, se poniamo l'origine del sistema di riferimento ad $x = 0$, la componente della forza è positiva se la molla è compressa ($x < 0$) mentre è negativa se la molla è allungata ($x > 0$): la forza elastica tende perciò a opporsi alla deformazione ed è una **forza di richiamo** verso la posizione a riposo della molla.
Osserviamo che nella risoluzione dei problemi si usa spesso il modulo delle forze e quindi la forza elastica è scritta $F = kx$.

Se tagliamo a metà una molla (o in un qualsiasi punto interno), la molla tende a tornare alle condizioni di riposo, per mantenere estesa o compressa questa parte occorre applicare una opportuna forza opposta a quella applicata dal moncone della molla. Questo indica che in ogni parte della molla c'è la trasmissione di una forza detta **tensione della molla** che agli estremi è proprio la forza $F = kx$. Infatti la molla applica contemporaneamente agli estremi la stessa forza in modulo ma opposta (la giustificazione è simile a quanto verrà dimostrato per la fune) e può essere sia una forza a "spingere" se la molla è compressa o a "tirare" se la molla è allungata.

Un'altra modo per applicare una forza a contatto è tramite una **fune**. **Fune ideale** sarà una fune inestendibile (per qualunque forza applicata alla fune la sua lunghezza è costante) e di massa trascurabile. Se applichiamo alla fune due forze opposte aventi modulo F_A e F_B alle estremità, dalla legge di Newton e considerando una dimensione e quindi un asse di riferimento (quello lungo la fune, i segni tengono conto della componente lungo questo asse) $F_A - F_B = m_{fune}a_{fune}$, se la massa della fune tende a zero $F_A - F_B = 0 \rightarrow F_A = F_B$ le forze alle estremità sono uguali e per il terzo principio la fune applica le stesse forze ma in verso opposto: la fune ideale trasmette la stessa forza da un'estremità all'altra, detta **tensione della fune**. Come per la molla questa tensione è presente in ogni punto della fune.
Osserviamo che la fune applica forze a "tirare" il corpo e non a "spingere" e funziona solo se è tesa; il fatto che una volta tesa è inestendibile è un vincolo cinematico sui corpi collegati: se sposto un corpo di x_A anche l'altro corpo si sposta della stessa quantità (se uso lo stesso asse anche per il secondo corpo) x_B ovvero $x_A = x_B$. Derivando tale vincolo cinematico $v_A = v_B$, le velocità dei corpi sono uguali, derivando ancora $a_A = a_B$, le accelerazioni sono uguali.

Osserviamo che se avessimo usato per il secondo corpo un secondo asse con orientamento discorde $x_A = -x_B$ quindi questa uguaglianza è da adattare al caso specifico con gli assi di riferimento scelti.

La fune può scorrere nella gola di una carrucola modificando la direzione lungo cui agisce la sua tensione. A questo proposito, l'aggiunta di una carrucola richiederebbe l'analisi della dinamica della carrucola, cosa che verrà fatta quando si analizzeranno i corpi rigidi. Se però la carrucola è ideale (senza massa) allora non occorre analizzare la sua dinamica.

Concludiamo le interazioni di contatto con l'ovvia osservazione che i corpi presenti sulla superficie terrestre sono immersi in un fluido (corpo che può scorrere, cioè un gas/vapore o un liquido). Il corpo solido deve farsi strada nel fluido e quindi nasce una forza detta di **attrito viscoso**. Dal punto di vista microscopico una particella (atomo o molecola) del fluido si scontra con le superfici del corpo solido e visto che prima e dopo l'urto la velocità è diversa vuol dire che ha agito una accelerazione e quindi una forza ($\vec{F} = m\vec{a}$) ma dal terzo principio la forza opposta è applicata al corpo solido. Sommando sul numero di particelle che ha agito mediamente sul corpo solido si ha la risultante di tutte le forze. Questo ha due effetti: la spinta di Archimede e se c'è anche moto relativo tra corpo e fluido, l'attrito viscoso. La spinta di Archimede dipende dal volume di fluido "spostato" dalla presenza del corpo solido che ha peso $\varrho_{fluido} V\vec{g}$ e la spinta è opposta $\vec{S}_A = -\varrho_{fluido} V\vec{g}$ (ϱ_{fluido} è la densità del fluido che moltiplicata per il volume del corpo solido V fornisce la massa "spostata" del fluido per la presenza del corpo solido). La forza di attrito viscoso dipende dalla velocità relativa, dal tipo di fluido, dalla rugosità delle superfici e forma del corpo solido ma per piccole velocità $\vec{v}$ è espressa da $\vec{F}_V = -\beta\vec{v}$, con β coefficiente di attrito viscoso.
Se non dichiarate esplicitamente, queste forze verranno trascurate nei problemi, in particolare per corpi che si trovano immersi in aria.

6) Risoluzione del problema dinamico

Daremo ora delle regole generali per risolvere un problema dinamico. Osserviamo che tali regole sono generali e si applicano all'analisi di un qualunque fenomeno che avviene nell'Universo che comporta un moto.

i) Il primo passo è la scelta del sistema di cui si vuole studiare la dinamica: il sistema potrebbe essere un corpo singolo o più corpi. In questa prima parte della Dinamica considereremo corpi puntiformi che richiedono solo la risoluzione della legge di Newton. Nel caso di corpi estesi (che possono anche ruotare) si aggiungerà anche una seconda equazione ma questo primo passo è sempre necessario. Per ciascuno dei corpi scelti si applicheranno singolarmente i passi successivi.

ii) Il secondo passo è individuare le interazioni tra un corpo del sistema in esame (lo chiameremo A) e tutti i corpi che lo circondano (ovvero l'esterno di A, tutti i corpi diversi

da A, anche quelli nel sistema scelto ma diversi da A, si potrebbe chiamare l'*universo* in cui sta A).
Potremmo distinguere le forze che rappresentano queste interazioni come forze interne se sono con corpi che appartengono al sistema o forze esterne con corpi non del sistema scelto. Questo sarà importante quando tratteremo i sistemi di più punti materiali.
Per il tipo di problemi che affronteremo ci troveremo per la quasi totalità vicino alla superficie terrestre e quindi l'unica forza che agisce a distanza di valore apprezzabile è la forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$. Le altre forze sono quelle di contatto e quindi occorre fare un'analisi di ciò che è fisicamente a contatto con A (piani di appoggio, molle, funi): per ciascuna di queste si aggiunge una forza.
Si disegna il **diagramma delle forze** detto anche **diagramma di corpo libero** perché non appaiono i vincoli al moto del corpo, solo la rappresentazione con segmenti orientati delle forze.
Se il sistema contiene altri corpi oltre ad A, si ripete l'analisi sostituendo ad A il secondo corpo del sistema A' fino ad esaurire tutti i corpi del sistema. Per ciascun corpo si conosce perciò la somma (risultante) delle forze ad esso applicate e si è disegnato il diagramma delle forze.

iii) Il terzo passo è la scelta di un sistema di riferimento inerziale. La scelta di orientazione e origine del sistema di riferimento inerziale è arbitraria ma alcune scelte semplificano ad esempio i vincoli cinematici, in particolare i vincoli cinematici dovuti ai piani di appoggio. Questo passo è quindi dipendente dall'ambiente esterno al corpo.
Inoltre ogni corpo del sistema potrebbe aver bisogno di sistemo di riferimento con una sua origine e orientazione differente.
In questa scelta è anche implicita la scelta dell'origine dei tempi: solitamente per tutti i corpi del sistema, il tempo iniziale sarà lo stesso.

iv) Il quarto passo è proiettare la legge di Newton (vettoriale) sul sistema di riferimento scelto. Da un membro dell'equazione si avrà la somma delle forze su questo corpo uguagliato alla massa di questo corpo per la sua accelerazione nell'altro membro. Le forze verranno considerate in modulo e verrà dato il segno opportuno per la componente sull'asse che si sta considerando.

v) Il quinto passo è l'aggiunta dei vincoli al moto del corpo (se non già considerati con la scelta del sistema di riferimento per i piani di appoggio). Queste sono equazioni aggiuntive che forniscono relazioni tra le coordinate dei corpi.

Riassumendo, per ciascun corpo del sistema si considera la legge di Newton $\vec{F}_A = m_A\vec{a}_A$ (proiettata sugli assi del sistema di riferimento) completata con le equazioni che descrivono i vincoli cinematici e si risolve questo sistema di equazioni con le opportune condizioni iniziali.

Lo schema descritto permette di risolvere il problema fisico giungendo a scrivere il sistema di equazioni che rappresenta la dinamica del sistema. Da questo punto in poi il problema diventa matematico per trovare la soluzione del sistema di equazioni.
La semplice scrittura $\vec{F}_A = m_A \vec{a}_A$ però nasconde l'equazione
$\sum \vec{F}_{universo \to A}(\vec{r}_A, \vec{v}_A, t) = m_A \frac{d\vec{v}_A}{dt} = m_A \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2}$ che è un'equazione differenziale in cui le forze possono dipendere dalla posizione del corpo A, dalla sua velocità e dal tempo.
Per semplificare, consideriamo una sola forza applicata al corpo in una sola dimensione, che dipenda solo dalla posizione (e facciamo cadere il pedice A) $F(x,t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$, se provo ad isolare l'accelerazione, abbiamo visto che $v = \int a\ dt = \int \frac{F(x,t)}{m} dt + v_i$ che è corretta ma di poca utilità, infatti devo già conoscere la posizione del corpo per poter conoscere $F(x,t)$ e calcolare l'integrale, ma in tal caso avrei già risolto il problema del moto se conoscessi la legge oraria.
Quindi occorre imparare le tecniche di risoluzione delle equazioni differenziali.

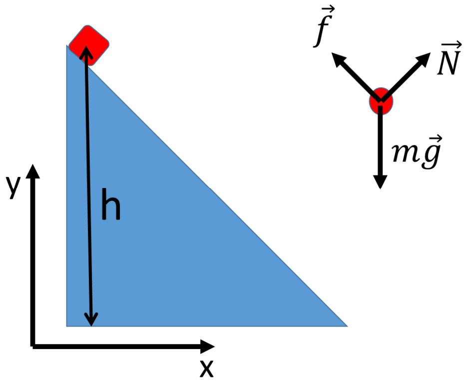
Nel caso di forze dipendenti solo dal tempo o costanti, il metodo di integrazione nel tempo permette di risolvere il problema.
Ad esempio se $F = cost \to v = \int a\ dt = \int \frac{F}{m} dt + v_i = \frac{F}{m} t + v_i$ e posso ancora integrare $x = \int v\ dt + x_i = \frac{1}{2}\frac{F}{m} t^2 + v_i t + x_i$.
La risoluzione diretta della legge di Newton, essendo un'equazione differenziale, limita i problemi che si possono affrontare nel presente corso a quelli che forniscono accelerazioni costanti.
Vedremo che l'introduzione di altre grandezze fisiche come l'energia permetteranno di superare in alcuni casi questa limitazione.
In ogni caso, anche se la risoluzione procederà per via energetica e non per via dinamica (ovvero con risoluzione equazione collegata alla legge di Newton) questi passi sono da eseguire esplicitamente (i primi tre sempre gli altri a seconda dei casi anche se è bene farli tutti).

Vediamo adesso una semplice applicazione di quanto detto sopra che andrà **studiata accuratamente**.

Consideriamo un corpo di massa $m = 1\ kg$ appoggiato su un piano inclinato scabro inclinato di $\theta = 45°$ rispetto all'orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_D = 0.3$. Se parte da fermo da un'altezza $h = 1\ m$ con che velocità arriva in fondo al piano e in quanto tempo?
Fornire i risultati con 3 cifre significative.

Osserviamo che se il piano fosse stato definito **liscio** era senza attrito, essendo **scabro** (ruvido) è con attrito.
Analizziamo per pignoleria anche il fatto che è fornito solo il coefficiente di attrito dinamico, ovvero il corpo deve essere supposto già in movimento all'istante inziale $t_i = 0$ (sembra un po' in contraddizione col fatto che parte dalla quiete) altrimenti doveva essere controllata la condizione sull'attrito statico massimo: se quest'ultimo è superiore alla risultante delle altre forze tangenziali al piano il corpo rimarrebbe in quiete. Come spesso succede si deve intendere che per $t > 0,\ t \to$

0, il corpo tende alla quiete ma non è in condizioni statiche che si raggiungerebbero solo per $t = t_i$.
Dal testo si è generata la figura (per l'istante iniziale) e il corpo da considerare è il blocchetto rosso (assunto puntiforme, passo 1).
È in contatto col piano inclinato e sono presenti sia la componente normale ($\vec{N}$) che tangenziale (attrito $\vec{f}$), si trova nel campo gravitazionale terrestre e ci sarà la forza peso ($m\vec{g}$) e il diagramma delle forze è anche indicato in figura (passo 2).
L'equazione di Newton è perciò $\vec{N} + \vec{f} + m\vec{g} = m\vec{a}$.
Notare che i vettori forza si sommano sempre per trovare la risultante, le componenti invece potranno anche sottrarsi.



Scegliamo arbitrariamente un sistema di riferimento come in figura (passo 3). Il moto avviene implicitamente lungo il piano inclinato e se mi metto nel piano che contiene il moto mi bastano 2 assi coordinati, altrimenti dovrei usare tre assi.
Questa scelta fornisce soprattutto le direzioni degli assi (i versori) mentre **l'origine potrà essere eventualmente spostata per semplificare le condizioni iniziali**.

Nel quarto passo proiettiamo l'equazione di Newton sugli assi scelti partendo dai **moduli delle forze**:
x: $N \sin\theta - f \cos\theta = ma_x$
y: $N \cos\theta + f \sin\theta - mg = ma_y$

Ora occorre fornire a questo sistema l'informazione che il corpo scende lungo il piano inclinato a 45° e quindi segue la retta $y = -x + p$ con p la costante opportuna per avere la retta coincidente col piano inclinato (vincolo cinematico, quinto passo). Il sistema completo di equazione è perciò:

x: $N \sin\theta - f \cos\theta = ma_x$
y: $N \cos\theta + f \sin\theta - mg = ma_y$
vincolo: $y = -x + p$

Il vincolo è verificato per ogni istante di tempo. Derivando il vincolo cinematico $v_y = -v_x$ (la costante p è sparita) e derivando ancora $a_y = -a_x$ da cui
x: $N \sin\theta - f \cos\theta = ma_x$
y: $N \cos\theta + f \sin\theta - mg = m(-a_x) \to N \cos\theta + f \sin\theta - mg = -N \sin\theta + f \cos\theta$
$\to N(\cos\theta + \sin\theta) + f\,(\sin\theta - \cos\theta) = mg.$

In questo caso il vincolo introduce una correlazione nel moto dello stesso corpo lungo i due assi; per una fune tra due corpi, il vincolo introdurrà una relazione tra coordinate di corpi diversi.

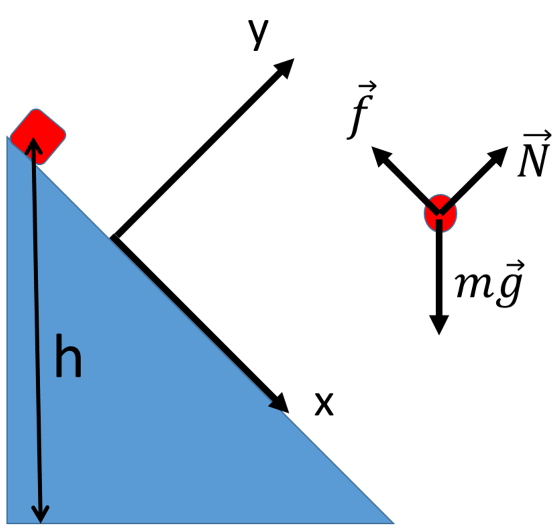
Osserviamo che per 45° $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e quindi $\sqrt{2}N - mg = 0 \to N = \frac{mg}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}mg$.

La forza di attrito dinamico è $f = \mu_D N = \mu_D \frac{mg}{\sqrt{2}} = \mu_D mg\frac{\sqrt{2}}{2}$ e quindi $a_x = \frac{N\sin\theta - f\cos\theta}{m} = \frac{N\sin\theta - \mu_D N\cos\theta}{m} = \frac{N}{m}(\sin\theta - \mu_D\cos\theta) = \frac{g}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mu_D\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = g\frac{1-\mu_D}{2} = 3.4335\ m/s^2$ (valore intermedio non arrotondato).
Quindi $a_x = g\frac{1-\mu_D}{2} = -a_y$.
Il modulo dell'accelerazione vale $a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{2{a_x}^2} = \sqrt{2}a_x = \frac{\sqrt{2}}{2}g(1-\mu_D)$.

Si osservi che **solo verso la fine dei calcoli sono stati sostituiti i valori numerici**: questo rende più chiaro cosa si sta facendo: ad esempio sostituendo subito i valori x: $N\frac{\sqrt{2}}{2} - f\frac{\sqrt{2}}{2} = a_x$ e y: $N\frac{\sqrt{2}}{2} + f\frac{\sqrt{2}}{2} - g = a_y$ si perde il controllo dimensionale dell'eguaglianza mescolando e uguagliando (apparentemente) forze e accelerazioni, infatti bisogna prestare più attenzione al fatto che i valori numerici non sono adimensionali, chi legge fa più fatica a seguire come procede la risoluzione. **Questo è da tener presente anche per la risoluzione dei problemi per un esame**, quanto scriviamo non deve essere capito da chi scrive ma da chi legge (e corregge).

L'accelerazione è **costante** sui due assi e possiamo integrarla
$v_x = \int a_x dt + 0 = a_x t$ e $v_y = -\int a_x dt + 0 = -a_x t$ e integrando ancora
$x = \int(a_x t)dt + x_i = \frac{1}{2}a_x t^2$ e $y = \int(-a_x t)dt + y_i = -\frac{1}{2}a_x t^2 + h$ avendo scelto l'origine degli assi in modo che il punto iniziale del moto sia $(0, h)$.
Il corpo raggiunte il fondo del piano inclinato nel tempo t_f e si troverà in posizione $\vec{r}_f = (x_f, y_f) = (h, 0)$.
Per rispondere alla prima domanda, poiché sappiamo la posizione finale $x_f = \frac{1}{2}a_x {t_f}^2 = h \to t_f = \sqrt{\frac{2h}{a_x}} = 0.7632\ s \approx 0.763\ s = 763\ ms$ da cui la velocità finale ha componenti $v_{fx} = a_x t_f = a_x\sqrt{\frac{2h}{a_x}} = \sqrt{2a_x h}$ e $v_{fy} = -a_x t_f = -\sqrt{2a_x h}$ e modulo $v_f = \sqrt{{v_{fx}}^2 + {v_{fy}}^2} = \sqrt{4a_x h} = 2\sqrt{a_x h} = 3.7059\frac{m}{s} \approx 3.71 m/s$.

Nella precedente risoluzione abbiamo scelto in modo poco accorto il sistema di riferimento. Modifichiamolo come in figura.
Con tale scelta, il corpo che scende lungo il piano inclinato mantiene sempre ad ogni istante la stessa quota $y = cost$ (essendo puntiforme dovrebbe essere $y = 0$). Derivando tale vincolo si $v_y = 0$; derivando ancora $a_y = 0$.
Proiettando la legge di Newton su queste coordinate



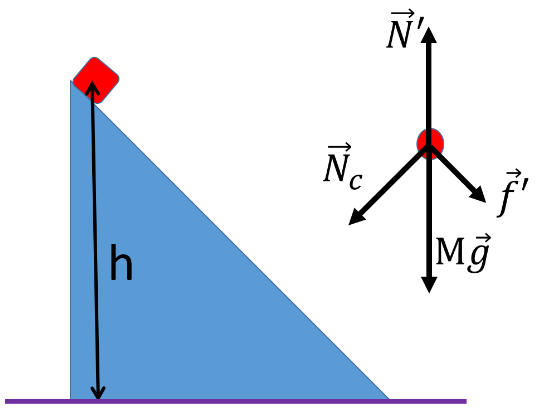
x: $-f + mg\ \sin\theta = ma_x = ma$
y: $N - mg\cos\theta = 0.$

Osservazione: il fatto che $a_y = 0$ è il risultato di iniziare con l'ipotesi $y = cost$. Però partendo da $a_y = 0$ significa che $v_y = cost'$ e non che $v_y = 0$ **cioè $a_y = 0$ non garantisce la condizione di quiete**: se però la condizione iniziale è $v_{yi} = 0$ tale valore verrà mantenuto in tutti gli istanti successivi.

Oltre a non servire più l'equazione del vincolo perché inclusa nella scelta delle coordinate, solo una componente dell'accelerazione è presente: infatti il moto avviene solo lungo x. La seconda equazione ci fornisce $N = mg\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}mg$, ovviamente uguale alla precedente soluzione da cui $f = \mu_D N = \mu_D\ mg\cos\theta$. Nel seguito faremo dei passaggi in più dimostrare che si ottengono (direttamente) gli stessi risultati di prima.
La prima equazione $-f + mg\ \sin\theta = ma \to a = \frac{mg\ \sin\theta - f}{m} = \frac{mg\ \sin\theta - \mu_D\, mg\cos\theta}{m} =$
$g(\sin\theta - \mu_D\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}g(1-\mu_D) = \sqrt{2}a_x$, uguale a prima.
Integrando l'accelerazione che è costante $v = \int a\ dt + v_i = at$ e integrando ancora $x = \int v\, dt + x_i = \frac{1}{2}at^2$ avendo scelto l'origine degli assi nella posizione iniziale del corpo.
La lunghezza del piano inclinato, cammino che dovrà percorrere il corpo, è $\ell = \frac{h}{\sin\theta} = \sqrt{2}h$ e quindi il tempo di discesa $t_f = \sqrt{\frac{2\,\ell}{a}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}h}{\sqrt{2}a_x}} = \sqrt{\frac{2\,h}{a_x}}$ come prima.
La velocità finale $v_f = at_f = \sqrt{2}a_x\sqrt{\frac{2\,h}{a_x}} = 2\sqrt{a_x h}$ come prima.

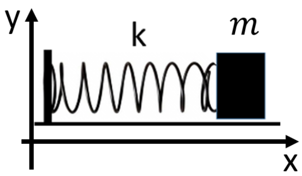
Osserviamo che la velocità poteva essere calcolata anche tramite la relazione cinematica che avevamo trovato elaborando le formule cinematiche ${v_f}^2 - {v_i}^2 = 2ax'$ con x' il cammino percorso: ${v_f}^2 = 2a\ell \to v_f = \sqrt{2a\ell} = \sqrt{2\sqrt{2}a_x\sqrt{2}h} = 2\sqrt{a_x h}$. Vedremo che questa relazione cinematica ha un significato più generale fondata sull'energia.

Osservazione: se volessimo analizzare quello che succede al piano di appoggio di massa M, dovremmo scegliere come sistema da analizzare il piano di appoggio (primo passo);
trovare le interazioni e disegnare il diagramma di corpo libero (secondo passo): il piano inclinato è appoggiato sul piano orizzontale viola, interagisce con il blocchetto rosso e con la Terra.
In figura è mostrato il diagramma con $M\vec{g}$ la forza peso, $\vec{N}_c$ e $\vec{f}'$ l'interazione normale e tangenziale con il blocchetto rosso, $\vec{N}'$ l'interazione col piano di appoggio orizzontale viola (**supposto liscio**).

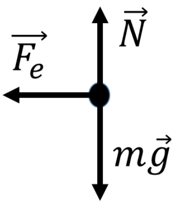


Per il terzo principio $\vec{N}_c = -\vec{N}$ e $\vec{f}' = -\vec{f}$ ovvero l'opposto delle forze applicate dal piano inclinato al blocchetto rosso nel problema risolto sopra. La risultante delle forze sarà $M\vec{g} + \vec{N}_c + \vec{f}' + \vec{N}'$. Poiché $\vec{N}'$ ha componente solo verticale e ci sono forze anche con componenti orizzontali (che il piano orizzontale viola non può compensare con l'attrito) è possibile che vi sia una forza netta in orizzontale e il piano inclinato viene accelerato in orizzontale: in particolare se il blocchetto scivola verso destra, il piano inclinato scivola verso sinistra a causa proprio della forza opposta a quella normale applicata al blocchetto.
Il sistema di assi della risoluzione precedente ancorato al piano inclinato non sarebbe più inerziale, quindi la risoluzione fatta prima sarebbe da modificare.

Consideriamo un altro esempio, apparentemente semplice, in cui analizziamo il moto di una massa m appoggiata su un piano liscio orizzontale ed attaccata ad una molla ideale di costante elastica k.



Descriveremo il moto della massa m che interagisce con la molla, il piano orizzontale liscio e la Terra.



Il diagramma di corpo libero è quindi quello mostrato in figura e scegliamo il sistema di riferimento mostrato nella figura precedente con l'origine degli assi nella posizione di equilibrio della molla in modo che la componente sull'asse x è $F_e = -kx$. Inoltre supponiamo che il moto avvenga con la massa sempre a contatto con il piano orizzontale da cui $y = cost$.
Proiettiamo la legge di Newton
X: $-kx = ma$
Y: $N - mg = 0 \rightarrow N = mg$ ma non essendoci attrito solo la prima equazione è interessante per il moto $-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$ e come si vede non si può risolvere per semplice integrazione nel tempo perché **l'accelerazione dipende dal tempo**.
L'equazione differenziale $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ con il coefficiente della x positiva ($\frac{k}{m} > 0$) è detta **equazione armonica**.
Nell'introduzione abbiamo visto che le funzioni trigonometriche seno e coseno hanno la proprietà che se si applica la derivazione per 2 volte si riottiene la stessa funzione ma cambiata di segno che è esattamente quello che esprime l'equazione armonica $\frac{d^2}{dt^2}x = -\frac{k}{m}x$ quindi una soluzione potrebbe essere $x(t) = \sin t$ (oppure $x(t) = \cos t$) però sappiamo che la funzione trascendente deve avere argomento adimensionale e il risultato è adimensionale quindi $x(t) = A\sin \omega t$ dove abbiamo introdotto l'ampiezza A, dimensionalmente una lunghezza, e la "velocità angolare" ω, però in tal caso detta **pulsazione** poiché l'oscillatore non ruota ma esegue un moto armonico ovvero la proiezione di un moto circolare su uno degli assi, che dimensionalmente è T^{-1} ma ωt deve fornire un angolo e quindi con unità di misura rad/s.
Proviamo a derivare $x(t) = A\sin \omega t$ ottenendo $\dot{x}(t) = A\omega \cos \omega t$ e derivando una seconda volta

$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin \omega t$ e sostituita nell'equazione armonica $(-A\omega^2 \sin \omega t) = -\frac{k}{m} A \sin \omega t$ (ovviamente è anche vero per il coseno $(-B\omega^2 \cos \omega t) = -\frac{k}{m} B \cos \omega t$ con una diversa ampiezza B).
Anche se il seno (o il coseno) si annulla, l'annullamento avviene su punti discreti e quindi possiamo dividere ambo i membri e semplificare nelle regioni dove non si annulla e, facendo il limite nei punti di annullamento, prolungare per continuità anche in questi punti, ottenendo $\omega^2 = \frac{k}{m}$ valore positivo e quindi $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La frequenza di oscillazione è ovviamente $f = \frac{\omega}{2\pi}$ e il periodo del moto
$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ da cui $\omega T = 2\pi$, dopo un periodo si ha una variazione dell'argomento (angolo) pari a un giro completo.
Essendo una equazione differenziale di secondo grado richiede due funzioni come soluzioni e queste sono proprio il seno e coseno e quindi la soluzione in generale è
$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$. A volte si scrive solo in termini di una sola funzione ma con un angolo detto fase iniziale $\phi \to x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ (oppure $x(t) = B \cos(\omega t + \varphi)$ le costanti saranno ovviamente diverse).

Osserviamo che qualunque sistema, anche non meccanico, descritto da un'equazione armonica avrà questa soluzione oscillante nella opportuna grandezza che deve soddisfare l'equazione. Ad esempio un oscillatore elettrico formato da un condensatore e un induttore (verranno definiti in Elettromagnetismo) sono descritti da un'equazione matematicamente uguale da cui sappiamo che la corrente elettrica oscillerà, la base per i generatori di onde radio.

7) Condizioni di equilibrio

Le condizioni di equilibrio per un punto materiale (per il quale non ha senso la rotazione) richiedono l'annullamento della risultante delle forze applicate al punto $\sum \vec{F} = \vec{0}$.
Per un corpo avente dimensioni non trascurabili solo questa condizione non basta a definire la condizione di equilibrio ed occorrerà aggiungere anche la condizione sulla rotazione che vedremo quando sarà introdotto il concetto di corpo rigido.

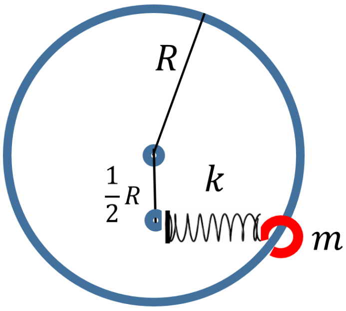
Come già osservato l'annullamento dell'accelerazione non implica automaticamente che il corpo sia in quiete: l'accelerazione, essendo la derivata della velocità, quando ha valore nullo ci indica solo che la velocità è costante $\vec{v} = \overrightarrow{cost}$. Bisogna aggiungere a questa condizione anche la condizione iniziale con la velocità iniziale nulla $\vec{v} = \vec{0}$, l'accelerazione nulla garantirà la costanza di tale valore per tutti gli istanti successivi.

8) Moti circolari

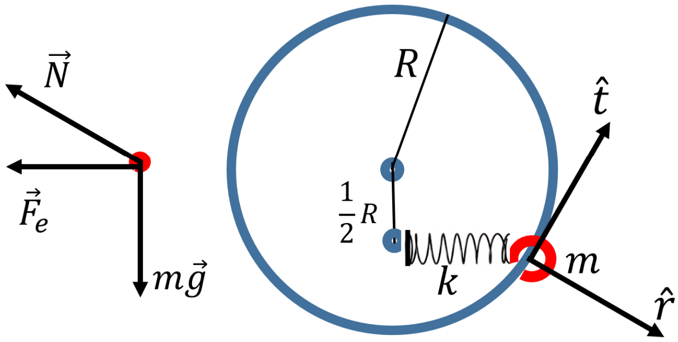
La scelta del sistema di riferimento nei moti circolari deve tener conto che l'accelerazione naturalmente si scompone in un componente radiale centripeto $\vec{a}_c$ e in un componente tangenziale $\vec{a}_t$. Come abbiamo visto nella cinematica, per i moti circolari è opportuno introdurre coordinate polari anziché utilizzare coordinate cartesiane xy (il piano è stato scelto coincidente con quello della traiettoria). Perciò si definisce un asse radiale che idealmente parte dal centro e un asse tangenziale il cui versore indica il verso di crescita (quindi positivo) dell'angolo che descrive il moto.

Ovviamente per un moto curvo ma non circolare questo implicherebbe l'utilizzo, punto per punto della traiettoria, della circonferenza osculatrice ma questo sarà utilizzato raramente nel corso.

Esempio: Un anello puntiforme di massa $m = 100\ g$ può scorrere su una guida circolare senza attrito di raggio $R = 50\ cm$ posto nel piano verticale. Una molla ideale di costante elastica $k = 500\ N/m$ ha lunghezza a riposo pari a $l_0 = R/10$ ed è collegata all'anello e fissata a un punto a $R/2$ sulla verticale sotto il centro della traiettoria come in figura.
Calcolare il modulo dell'accelerazione a cui è sottoposto l'anello nella posizione iniziale se parte con velocità $v_i = 2\ m/s$ verso il basso dalla posizione con la molla orizzontale e la forza che l'anello applica alla guida. Fornire i risultati con due cifre significative.



Per risolvere tale problema iniziamo a definire il sistema che sarà l'anello.
Le interazioni dell'anello sono: con la Terra rappresentata dalla forza peso $m\vec{g}$, dalla normale all'anello (dovremo stabile se verso l'interno o l'esterno perché forza peso e molla agiscono in modo contrapposto) $\vec{N}$ ma senza la parte tangenziale perché non c'è attrito, infine dalla forza elastica della molla $\vec{F}_e$.



Per la parte numerica, convertiamo $m = 0.100\ kg$, $R = 0.50\ m$.

Iniziamo a calcolare la lunghezza iniziale della molla: la semi-corda (pari alla lunghezza della molla) sarà data dal teorema di Pitagora $l = \sqrt{R^2 - (\frac{1}{2}R)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R = 0.4330\ m$, infatti il triangolo rettangolo formato dalla molla e dal raggio è metà di un triangolo equilatero di cui la molla è l'altezza, da cui la direzione radiale che passa per l'anello è inclinata di θ =30° verso il basso rispetto all'orizzontale: $\frac{1}{2}R = R\sin(30°)$.
Dal valore della lunghezza sappiamo che la molla è allungata poiché $\Delta l = l - l_0 = 0.3830\ m > 0$, quindi la forza elastica sarà orientata verso sinistra e di modulo $k|\Delta l| = k\Delta l$.
Disegniamo il diagramma di corpo libero, supponiamo che la normale sia centripeta (l'anello si appoggia sulla faccia interna della guida).
Scegliamo come positive le rotazioni antiorarie (da cui il verso dell'asse di riferimento lungo l'asse di rotazione è uscente dal foglio), questo definisce un versore tangente alla traiettoria $\hat{t}$ e

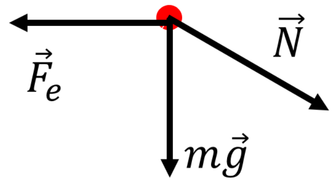
completiamo con un versore radiale $\hat{r}$ (entrambi ruotati di 30° rispetto ai soliti assi x,y orizzontali e verticali). Proiettiamo la legge di Newton partendo dai moduli delle forze

t: $-mg\cos\theta - F_e\sin\theta = ma_t$

r: $mg\sin\theta - F_e\cos\theta - N = -ma_c = -m\frac{{v_i}^2}{R}$ (segno meno perché centripeta)

dalle equazioni si ricava che $a_t = \frac{-mg\cos\theta - F_e\sin\theta}{m} = -966.0275\frac{m}{s^2} \approx -0.97 \cdot 10^3\ m/s^2$ mentre $a_c = \frac{{v_i}^2}{R} = 8.0\ m/s^2$ da cui l'accelerazione complessiva ha modulo $a = \sqrt{{a_c}^2 + {a_t}^2} = 966.0606\ \ m/s^2 \approx 0.97 \cdot 10^3\ m/s^2$.

La componente della forza normale è $N = ma_c + mg\sin\theta - F_e\cos\theta = -164.5589\ N \approx -1.6\ \cdot 10^2\ N = -0.16\ kN$. Il valore è negativo e quindi l'ipotesi che l'anello si appoggiasse sulla faccia interna della guida era sbagliata, invece si appoggia sulla faccia esterna, come mostrato nella figura a fianco.



La forza che l'anella applica alla guida per il terzo principio è pari a $-\vec{N}$ e di modulo 0.16 kN.

9) Differente formulazione della legge di Newton

La legge di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ è scritta utilizzando l'accelerazione ma è possibile introdurre una quantità che tiene conto sia della massa che della cinematica di un corpo.

Definiamo come **quantità di moto** la grandezza $\vec{p} = m\vec{v}$ che contiene sia la velocità del corpo sia la sua massa. Le unità di misura sono $kg\ m/s$.

Se deriviamo rispetto al tempo $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$ e quindi possiamo scrivere la legge di Newton come $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

La prima formulazione è quella che spesso useremo ma questa seconda permette di risolvere problemi quali gli urti o i sistemi a massa variabile.

Inoltre in questa forma si riesce a sviluppare parti di meccanica analitica di interesse per lo studio di sistemi complessi.

Un'altra quantità legata alla quantità di moto è **l'impulso di una forza** $\vec{I}$ che è l'integrale nel tempo di una forza in particolare impulsiva (ovvero che ha una durata limitata nel tempo e in genere è di intensità elevata) $\vec{I} = \int \vec{F}dt$ con unità Ns.

Se la risultante delle forze $\vec{F}$ è impulsiva (in particolare se c'è una forza impulsiva molto più intensa delle altre che possono essere trascurare in modo che la risultante sia con buona approssimazione questa forza impulsiva) la variazione della quantità di moto $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int \frac{d\vec{p}}{dt}dt$ in questo intervallo di tempo in cui agisce la forza impulsiva sarà uguale a $\int \frac{d\vec{p}}{dt}dt = \int \vec{F}dt$, ovvero $\Delta\vec{p} = \vec{I}$ (questa uguaglianza è il **teorema dell'impulso**).

Introduciamo anche un'altra quantità che non porta nessuna nuova informazione per un punto materiale ma che sarà fondamentale per trattare le rotazioni dei corpi rigidi estesi.

Definiamo il **momento della quantità di moto** come $\vec{\ell} = \vec{r}_P \times \vec{p}$, detto anche **momento angolare**.

Il vettore posizione $\vec{r}_P$ è quello di un punto detto **polo.** Il polo in genere è un punto fisso e si sceglie sull'asse di rotazione oppure sul punto che definiremo per i sistemi di punti che sarà il centro di massa.
Se proviamo a derivare il momento angolare conservando l'ordine dei fattori essendo il prodotto vettoriale non commutativo $\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\vec{r}_P\right) \times \vec{p} + \vec{r}_P \times \left(\frac{d}{dt}\vec{p}\right) = \vec{v}_P \times \vec{p} + \vec{r}_P \times \vec{F}$. Se il polo è un punto fisso la sua velocità è nulla $\vec{v}_P = \vec{0}$, da cui $\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r}_P \times \vec{F}$.
Il prodotto $\vec{r}_P \times \vec{F}$ definisce il **momento della risultante delle forze** ed essendo il prodotto vettoriale distributivo rispetto alla somma, se $\vec{F} = \sum \vec{F}_j$ allora $\vec{r}_P \times \vec{F} = \sum (\vec{r}_P \times \vec{F}_j)$ ovvero il momento della forza risultante è la somma dei momenti di ciascuna forza $\vec{\tau}_j = \vec{r}_P \times \vec{F}_j$.
La risultante dei **momenti delle forze** determina la variazione del momento angolare $\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \sum \vec{\tau}_j$.
Tale relazione applicata ad un punto materiale non aggiunge nessuna nuova informazione rispetto alla legge di Newton ma per i sistemi di punti permetterà di trattare le rotazioni.