III PARTE: Lavoro ed Energia

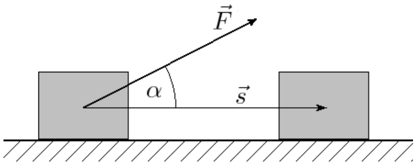
1) Lavoro di una forza

La legge di Newton permette di trovare la legge oraria del corpo ma come abbiamo visto non è sempre agevole trovare la soluzione all'equazione differenziale. Nella legge di Newton ciò che determina le variazioni al movimento sono le forze e in particolare se il corpo si muove vi è uno spostamento.

Partendo da questo definiamo come **lavoro di una forza** $\vec{F}$ l'integrale $L = \int \vec{F} \bullet d\vec{s}$, $d\vec{s}$ rappresenta uno spostamento infinitesimo. L'unità di misura nel S.I. è il juole J.

Questo integrale viene eseguito sulla traiettoria seguita dal corpo ed è matematicamente un integrale di linea.

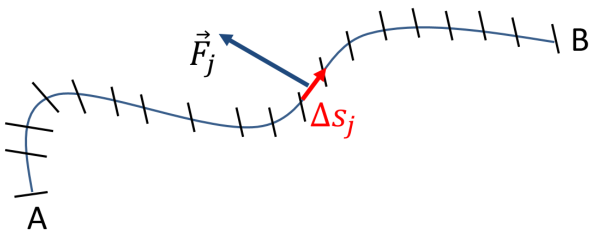
Per capire come si arriva a tale definizione generale, partiamo dalla definizione di lavoro come prodotto forza per spostamento $\vec{F} \bullet \vec{s}$: il lavoro è una quantità scalare e quindi occorre proiettare la forza nella direzione dello spostamento mediante il prodotto scalare.



Osserviamo che il lavoro è nullo per spostamento nullo o nel caso la forza sia perpendicolare allo spostamento. Il termine utilizzato in fisica differisce dalla definizione di lavoro dell'esperienza quotidiana legata alla fatica muscolare. Infatti se tengo sollevata e ferma una pesante valigia, dal punto di vista meccanico non compio lavoro. Ma anche se mi muovo con la valigia, poiché il mio braccio applica una forza verticale e lo spostamento è orizzontale non si compie un lavoro meccanico.

Il lavoro è positivo se la forza si proietta con lo stesso verso sullo spostamento altrimenti è negativo

Tale definizione elementare però non si può applicare a una forza che varia da punto a punto e a cammini non rettilinei.



Data una traiettoria curva qualunque (purché non abbia punti di discontinuità come punti angolosi) la possiamo suddividere in tratti più piccoli che saranno approssimativamente rettilinei. Se il tratto è piccolo, la forza non varierà apprezzabilmente (in direzione e modulo) e quindi il lavoro nel tratto j-esimo può essere calcolato utilizzando la definizione elementare $L_j = \vec{F}_j \bullet \Delta\vec{s}_j$. Il lavoro complessivo sarà la somma dei lavori sui vari tratti $\sum_j L_j = \sum_j \vec{F}_j \bullet \Delta\vec{s}_j$.

Più è alto il numero di tratti e meglio si approssima sia la condizione di tratto lineare sia la condizione di costanza della forza. Facendo il limite per $\Delta\vec{s}_j \to 0$ (e quindi il numero di tratti che diventano infinitesimi, tende all'infinito) si ottiene l'integrale di linea della definizione generale $L = \int \vec{F} \bullet d\vec{s}$ e $d\vec{s}$ è lo spostamento di un tratto infinitesimo tangente alla traiettoria.

È evidente che un integrale di linea è definito sia dal suo argomento, la forza, sia dalla linea su cui deve essere calcolato, la traiettoria, sia dall'orientazione della linea, da A (punto iniziale) a B (punto finale).

Vediamo adesso alcune proprietà:

i) Se il corpo si muove da A a B il lavoro della forza in questo percorso sia L_{AB}, se invece parte da B e torna in A $L_{BA} = -L_{AB}$. Questo è chiaro dalla definizione approssimata di integrale di linea $\sum_j \vec{F}_j \bullet \Delta\vec{s}_j$: infatti cambiare la direzione di percorrenza della curva (traiettoria) vuol dire cambiare segno a tutti gli spostamenti $\sum_j \vec{F}_j \bullet \left(-\Delta\vec{s}_j\right) = -\sum_j \vec{F}_j \bullet \Delta\vec{s}_j$. In tale definizione la forza è solo funzione della posizione e non del tempo, $\vec{F}(x, y, z)$, altrimenti il tornare indietro implicherebbe tempi differenti dell'andata e quindi la forza dipendente dal tempo sarebbe diversa e anche il lavoro.
   Tale proprietà non vale per l'attrito: infatti se cambio verso allo spostamento anche l'attrito cambia verso opponendosi sempre allo spostamento e quindi per l'attrito dinamico $L_{BA} = L_{AB}$<0. Infatti l'attrito dinamico non è funzione (vettoriale) univoca della posizione dipende dalla direzione in cui arrivo al punto. L'attrito statico, se il punto nel sistema di riferimento non si muove (spostamento zero) non fa lavoro.

ii) Se la linea γ che rappresenta la traiettoria è divisa in due parti (linee) il singolo integrale si spezza nella somma degli integrali sulle due linee $L = \int \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_{\gamma} \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \bullet d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \bullet d\vec{s}$. Questo è facilmente dimostrabile dalla definizione approssimata di integrale di linea $\sum_j \vec{F}_j \bullet \Delta\vec{s}_j$: la sommatoria complessiva viene arrestata sui tratti della prima linea a cui si aggiunge la sommatoria sui tratti della seconda linea.
   Nel caso la traiettoria contenga un punto angoloso (e dalla cinematica sappiamo che può esistere solo se la velocità va a zero), l'integrale si può spezzare proprio nei punti angolosi superando la limitazione che la traiettoria debba essere una funzione "liscia" (cioè derivabile e quindi con tangente unica in ogni punto escludendo così i punti angolosi dove la tangente è differente arrivando da prima del punto angoloso o da dopo)

iii) Il lavoro compiuto dalla forza opposta è cambiato di segno $L = \int (-\vec{F}) \bullet d\vec{s} = -\int \vec{F} \bullet d\vec{s}$.

iv) il lavoro della somma di forze è la somma degli integrali di queste forze ovvero dei lavori di queste forze $L = \int (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) \bullet d\vec{s} = \int \vec{F}_1 \bullet d\vec{s} + \int \vec{F}_2 \bullet d\vec{s} + \int \vec{F}_3 \bullet d\vec{s}$

A volte ci sono cammini chiusi e si indicano con cerchietto sul segno di integrale $\oint \vec{F} \bullet d\vec{s}$: questi cammini chiusi sono di particolare interesse e effettuare il calcolo dell'integrale si definisce **circuitazione**.

Se siamo in una sola dimensione, ad esempio lungo l'asse x, l'integrale si riduce a $L = \int_A^B F_x dx$ che è il solito integrale che abbiamo già definito perché in 1D $F_x(x)$ dipende solo da una coordinata. In più dimensioni se $d\vec{s} = (dx, dy, dz)$ è il **vettore infinitesimo tangente alla traiettoria**, l'argomento dell'integrale è $\vec{F} \bullet d\vec{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ e quindi $\int \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$ però chiaramente i tre infinitesimi dx, dy, dz sono tra loro correlati poiché devono fornire la tangente alla linea e in generale ogni componente della forza $F_x(x, y, z)$ dipenderà dal punto in più dimensioni.

Noi risolveremo questi integrali in casi particolari: o perché unidimensionali o sfruttando le proprietà del prodotto scalare o perché la forza è costante.

Diamo comunque un cenno a come si potrebbe eseguire l'integrale. Si inizia dalla rappresentazione parametrica della curva (ovvero una relazione vettoriale che lega un parametro p che varia in un intervallo su una retta (geometricamente un segmento da p_i a p_f) e viene trasformato nella curva γ in 2D o 3D, quindi un segmento viene "mappato" in una curva $\gamma: p \rightarrow$

$$\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \\ z = z(p) \end{cases}$$

Ad esempio noi abbiamo già visto la rappresentazione parametrica della retta $\vec{r} = \vec{w}p + \vec{r}_0$ con $\vec{w}$ vettore direzionale e $\vec{r}_0$ il punto per cui passa la retta e il parametro p potrebbe andare da $p_i \rightarrow -\infty$ a $p_f \rightarrow +\infty$ se vogliamo rappresentare tutta la retta.

Se dobbiamo integrare sulla linea, la forza deve essere calcolata sui punti della linea $\vec{F} = \vec{F}(x(p), y(p), z(p))$ e quindi diventa una funzione (a valori vettoriali) del singolo parametro p. In modo analogo a quanto fatto per le leggi orarie che derivate ci davano la velocità $\vec{v}$ tangente alla traiettoria, il vettore infinitesimo tangente che fornisce lo spostamento infinitesimo è $d\vec{s} =$

$$\begin{cases} dx = \frac{dx(p)}{dp} dp \\ dy = \frac{dy(p)}{dp} dp \\ dz = \frac{dz(p)}{dp} dp \end{cases}$$ analogo a pensare che se $\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} \cong \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ (il rapporto incrementale è circa la derivata)

$\Delta\vec{s} \cong \vec{v}\Delta t$ e nel limite $d\vec{s} = \vec{v}\,dt$ con $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Nel caso cinematico il parametro è il tempo mentre qui il parametro è quello geometrico p (ma la matematica non fa distinzioni) e le derivate delle coordinate (ad esempio $\frac{dx(p)}{dp}$) sono funzioni di questo parametro.

Per il calcolo si esegue il prodotto scalare $\vec{F}\big(x(p), y(p), z(p)\big) \bullet (dx, dy, dz) = F_x\big(x(p), y(p), z(p)\big)\frac{dx(p)}{dp}dp + F_y\big(x(p), y(p), z(p)\big)\frac{dy(p)}{dp}dp + F_z\big(x(p), y(p), z(p)\big)\frac{dz(p)}{dp}dp$ e poi si integra $\int_{p_i}^{p_f} F_x\big(x(p), y(p), z(p)\big)\frac{dx(p)}{dp}dp + \int_{p_i}^{p_f} F_y\big(x(p), y(p), z(p)\big)\frac{dy(p)}{dp}dp + \int_{p_i}^{p_f} F_z\big(x(p), y(p), z(p)\big)\frac{dz(p)}{dp}dp$.

Questi sono integrali su una singola variabile p, quelli su cui stiamo già operando, però è molto probabile che la funzione integranda sia una funzione più complessa di quelle che al momento riusciamo ad integrare con le conoscenze acquisite nel corso.

Poiché devono esistere le derivate rispetto al parametro ciò esclude curve con punti angolosi, in tal caso si spezza la curva complessiva (quindi l'integrale) nel punto angoloso come detto prima.

Nella definizione di lavoro non si considera il tempo necessario ad effettuare lo spostamento. Se questo avviene in un intervallo di tempo Δt, il rapporto $\wp_m = \frac{L}{\Delta t}$ viene detto **potenza media** con unità nel S.I. watt W.

Poiché uno spostamento infinitesimo $d\vec{s}$, che avviene in un intervallo di tempo infinitesimo dt, produce un lavoro infinitesimo $dL = \vec{F} \bullet d\vec{s}$, la potenza (istantanea) sarà $\wp = \frac{\vec{F} \bullet d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \bullet \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \bullet \vec{v}$

quindi legata alla velocità del corpo: in tal caso il lavoro della forza si può calcolare $L = \int \wp \, dt = \int \vec{F} \bullet \vec{v} \, dt$ sull'intervallo di tempo in cui il corpo si sposta da A a B.

Abbiamo osservato che il lavoro della forza di attrito (dinamico) è negativo poiché si oppone sempre allo spostamento, potremo dire che è una forza resistente, invece una forza che produce lavoro positivo è una forza motrice.

Infine, per il calcolo esplicito di un integrale del lavoro opereremo **eseguendo prima il prodotto scalare** per eliminare i vettori (che in genere saranno costanti ed useremo la rappresentazione sintetica del prodotto scalare) e poi operando sui moduli che sono degli scalari. Un valore costante si porta fuori dall'integrale. Se rimane l'integrale $\int ds$, sommando i "pezzettini" che formano la curva si ottiene la lunghezza della curva $\int ds = \ell$.

2) Teorema lavoro-energia

Dimostreremo un teorema molto importante, che parte dalla legge di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$.
La prima considerazione è che la forza in tal caso è la **risultante delle forze** e di questa ne calcoleremo il lavoro (e quindi sarà la somma di tutti i lavori delle singole forze la cui somma fornisce la risultante).
Il lavoro infinitesimo è $dL = \vec{F} \bullet d\vec{s}$ ma sappiamo che possiamo scriverlo in termini della velocità $dL = \vec{F} \bullet \vec{v} \, dt$, inoltre, **essendo la forza risultante**, dalla legge di Newton $dL = m\vec{a} \bullet \vec{v} \, dt$.

Consideriamo ora il modulo al quadrato della velocità $v^2 = \vec{v} \bullet \vec{v} = v_x v_x + v_y v_y + v_z v_z$ e deriviamolo rispetto al tempo conservando l'ordine dei prodotti per maggior chiarezza $\frac{d}{dt}(\vec{v} \bullet \vec{v}) = a_x v_x + v_x a_x + a_y v_y + v_y a_y + a_z v_z + v_z a_z = 2(a_x v_x + v_y a_y + v_z a_z) = 2\vec{v} \bullet \vec{a}$ (dal punto di vista vettoriale senza passare dalle coordinate $\frac{d}{dt}(\vec{v} \bullet \vec{v}) = \left(\frac{d}{dt}\vec{v}\right) \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \left(\frac{d}{dt}\vec{v}\right) = \vec{a} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{a} = 2\vec{v} \bullet \vec{a} = 2\vec{a} \bullet \vec{v}$).

Sostituendo nel lavoro $dL = m\vec{v} \bullet \vec{a} \, dt = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(\vec{v} \bullet \vec{v}) dt$, integrando $L = \int dL = \int \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(\vec{v} \bullet \vec{v}) dt = \frac{1}{2} m \int \frac{d}{dt}(v^2) dt$ ma integrando la derivata si ottiene la funzione primitiva e poiché è un integrale tra un istante iniziale e uno finale (quindi definito) $L = \frac{1}{2} m {v_f}^2 - \frac{1}{2} m {v_i}^2$.

Questo teorema mostra che il lavoro della risultante delle forze applicate ad un corpo determina la variazione della quantità $K = \frac{1}{2} m v^2 \to L = \Delta K = K_f - K_i$.
La funzione della velocità K è detta **energia cinetica** del corpo e il teorema appena dimostrato si chiama teorema lavoro-energia cinetica (o semplicemente teorema lavoro-energia) od anche teorema delle forze vive. Le unità sono le stesse del lavoro e quindi joule.

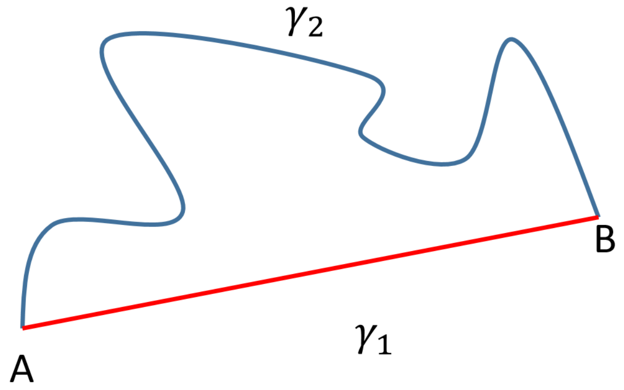
Un corpo se si muove possiede quindi energia cinetica che cresce quadraticamente con la sua velocità.

3) Forze conservative, loro proprietà e conseguenze

Le forze finora sono state classificate come forze di contatto o a distanza. È più interessante classificarle in base al loro comportamento rispetto alla circuitazione ovvero il lavoro su un **cammino chiuso** $L = \oint \vec{F} \bullet d\vec{s}$ (ora la forza è una qualunque forza e non la risultante).

Il simbolo di integrale acquista il "cerchietto" per indicare che l'integrazione avviene su una curva chiusa.

Se una forza, **per qualunque cammino chiuso**, ha la proprietà che $\oint \vec{F} \bullet d\vec{s} = 0$ allora è detta **forza conservativa**.



Osserviamo che una cammino chiuso parte da un punto A e ritorna allo stesso punto, questo cammino può essere spezzato in 2 cammini da A a B (γ_1) e da B ad A (γ_2) distinti $\oint \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_{\gamma_1 A}^{B} \vec{F} \bullet d\vec{s} + \int_{\gamma_2 B}^{A} \vec{F} \bullet d\vec{s} = 0$ ovvero $\int_{\gamma_1 A}^{B} \vec{F} \bullet d\vec{s} = -\int_{\gamma_2 B}^{A} \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_{\gamma_2 A}^{B} \vec{F} \bullet d\vec{s}$ nell'ultimo integrale sulla curva γ_2 si sono scambiati i punti A e B. Si vede che il lavoro non dipende più dal cammino percorso: partendo da A e seguendo il cammino γ_1 si arriva in B si compie lo stesso lavoro che partendo da A e arrivando in B seguendo il cammino γ_2.

I due cammini possono essere il più breve tra A e B (quello rosso) e qualunque cammino (entro il dominio di definizione della forza) anche lungo migliaia di volte quello più breve ma il risultato è lo stesso!

Una forza, dipendente dalla posizione, che ha tale proprietà è detta **forza conservativa**.

Se una **forza è conservativa compie un lavoro che dipende sono dal punto inziale A e finale B ma non dipende più da quanto lungo è il percorso tra A e B**.

La forza di attrito dinamico $\vec{f_D}$ compie un lavoro che è sempre negativo (sempre opposta allo spostamento) ed aumentando il cammino aumenta, calcoliamolo per un moto su un piano orizzontale:

$\int_{\gamma_1 A}^{B} \vec{f_D} \bullet d\vec{s} = \int_{\gamma_1 A}^{B} -f_D\, ds$ (perché $\cos 180° = -1$) $= -f_D \int_{\gamma_1 A}^{B} ds$ (la forza di attrito di un punto materiale su un piano orizzontale è costante $f_D = \mu_D N$)$= -f_D \ell$ infatti l'integrale $\int_{\gamma_1 A}^{B} ds$ somma tutti gli spostamenti che messi assieme forniscono il cammino totale ℓ.

Il moto è avvenuto sempre sul piano orizzontale ed il lavoro è quindi $L = -f_D \ell$ che aumenta con il cammino percorso. La forza d'attrito è quindi una forza non conservativa ma **dissipativa**, anche su un circuito chiuso la forza d'attrito dinamico compirebbe lavoro.

Se il **lavoro di una forza conservativa** $\vec{F}$ dipende solo da A e B ma non cammino percorso, questo lavoro **diventa una funzione dei due punti A e B** e quindi possiamo scrivere $L = f(A, B)$ e se

facciamo l'ulteriore assunzione di porre il **punto A come punto di riferimento** (sempre fisso per il calcolo del lavoro della forza conservativa) la funzione dipenderebbe solo dal punto finale B $L = f_A(B)$, ovviamente nel caso generale sarebbe una funzione $f_A(x, y, z)$.
Questo risultato per le forze conservative permette di definire una funzione **energia potenziale** $U = -f_A(B)$ (dove la ragione del segno meno diverrà chiara nel seguito). In realtà poiché c'è sempre il punto di riferimento la funzione energia potenziale è sempre definita a meno di una costante, il valore dell'energia potenziale nel punto di riferimento (in fondo la definizione implica un integrale e sappiamo che esiste sempre una costante di integrazione).

Osserviamo **che la scelta del punto di riferimento è sempre da fare esplicitamente** per risolvere i problemi con l'energia. Questo è **un passo che si aggiunge a quelli per la risoluzione dei problemi**.

Se ci spostiamo tra un punto iniziale $\vec{r}_i$ ed uno finale $\vec{r}_f$ il lavoro della forza conservativa sarà $L_{i\to f} = \int_i^f \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_i^A \vec{F} \bullet d\vec{s} + \int_A^f \vec{F} \bullet d\vec{s}$ anziché andare direttamente al punto finale passiamo dal riferimento tanto il risultato non dipende dal cammino $= -\int_A^i \vec{F} \bullet d\vec{s} + \int_A^f \vec{F} \bullet d\vec{s} = -\left(f_A(\vec{r}_i)\right) + f_A\left(\vec{r}_f\right) = U(\vec{r}_i) - U\left(\vec{r}_f\right) = -\left(U\left(\vec{r}_f\right) - U(\vec{r}_i)\right) = -\Delta U$, da cui $L_{i\to f} = -\Delta U$.

Osserviamo che, anche se U è definito a meno di una costante, in tutti i processi è coinvolta la differenza tra due punti $\Delta U = U_f - U_i$ per cui la costante non contribuisce.

Se supponiamo che nel moto di un punto solo una forza conservativa sia coinvolta, il teorema lavoro energia diventa $L = \Delta K$ ma dal risultato precedente $-\Delta U = \Delta K$ ovvero $\Delta K + \Delta U = 0$ da cui $\Delta(K + U) = 0$.
Definiamo come **energia meccanica** (totale) del sistema E la somma $E = K + U$. La relazione $-\Delta U = \Delta K$ indica che le diminuzioni dell'energia potenziale producono aumenti dell'energia cinetica (e viceversa) mentre **l'energia totale si conserva**, da cui il termine di forza conservativa.

Inoltre l'energia è somma dei due termini $E = K + U$ perché l'energia potenziale è **stata definita con segno meno** altrimenti si avrebbe $E = K - U$.

Quindi, **in presenza di sole forze conservative si ha conservazione dell'energia**, ovvero se il sistema possiede un'energia iniziale E_i e al termine un'energia finale E_f, senza forze dissipative che compiono lavoro $E_i = E_f$.

Il teorema lavoro-energia viene a volte riscritto separando il lavoro delle forze conservative L_c da quello delle forze non conservative L_{nc} ottenendo
$L = L_c + L_{nc} = -\Delta U + L_{nc} = \Delta K$ riordinando i termini $L_{nc} = \Delta K + \Delta U = \Delta E$ e quindi $L_{nc} = \Delta E$ **il lavoro delle forze non conservative modifica l'energia del sistema**.

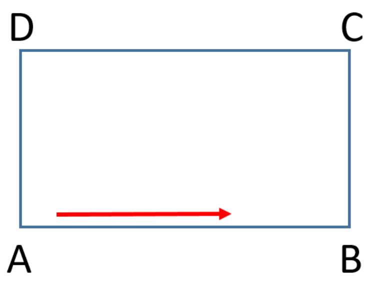
Ad esempio se un motore di un'auto compie lavoro bruciando benzina, il lavoro svolto dal motore aumenta l'energia del sistema, invece il lavoro svolto da forze dissipative diminuisce l'energia del sistema.
Se io spingo una cassa appoggiata sul pavimento, il lavoro positivo che svolgo (non conservativo) aumenta l'energia della cassa.

Facciamo una breve digressione sul concetto di energia appena introdotta.
L'energia meccanica è quella che macroscopicamente si utilizza per far muovere gli oggetti macroscopici. La forza di attrito dissipa energia ma nel modello fenomenologico con le asperità che si saldano e si rompono, queste asperità dopo la rottura vibrano e per farle vibrare occorre energia ma questa energia non è utilizzabile per far muovere i corpi. D'altra parte le asperità e in definitiva gli atomi costituenti il materiale prima avevano meno energia e dopo ne hanno di più e si muovono più velocemente, questo indica che c'è stato un trasferimento di energia ma che dal punto di vista macroscopico non implica una variazione di moto e quindi si chiama un trasferimento di calore e questo ha aumentato la temperatura del corpo (perché in media si agitano di più le particelle costituenti il corpo). Quindi l'energia meccanica (macroscopica) persa non è sparita ma è stata trasferita alle particelle dei due corpi a contatto incrementando mediamente l'energia (interna) dei due corpi a contatto. Questo comporta che la conservazione dell'energia in realtà è sempre verificata ma il concetto di energia deve essere esteso ad altre forme di energia. Il carburante bruciando (reazione di ossidazione) trasforma l'energia chimica nei legami chimici in energia di movimento microscopica (energia interna del gas nei cilindri del motore) il cui aumento di pressione agisce sul pistone facendo muovere (macroscopicamente) e cambiando l'energia meccanica dell'auto.
In Meccanica ci si limita al concetto macroscopico di energia la conservazione è verificata in presenza di sole forze conservative.
Invece dal punto di visto microscopico c'è sempre conservazione di energia.

4) Elenco forze conservative

Abbiamo parlato di forze conservative ma per il momento non sappiamo se esistono veramente, occorre che esse verifichino $L = 0$ su un qualunque cammino chiuso. Dal punto di vista matematico esistono delle condizioni sulle derivate da controllare ma noi ci accontenteremo di controllare casi specifici.

La forza peso è una forza conservativa: se integriamo su una traiettoria che è rettangolo ABCD osto nel piano verticale con due lati verticali vedremo che il lavoro della forza peso è nullo.
Il cammino presenta punti angolosi e quindi lo spezziamo nei 4 lati, 2 orizzontali AB e CD e 2 verticali BC e DA di altezza h, ovvero $L = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} + \int_B^C \vec{F} \bullet d\vec{s} + \int_C^D \vec{F} \bullet d\vec{s} + \int_D^A \vec{F} \bullet d\vec{s}$. Nei cammini orizzontali la forza è però verticale $m\vec{g} \bullet d\vec{s} = 0$ e quindi non contribuiscono $\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} = 0 = \int_C^D \vec{F} \bullet d\vec{s}$, nei cammini verticali la forza è anti-parallela ($m\vec{g} \bullet d\vec{s} = -mg\ ds$) o parallela ($m\vec{g} \bullet d\vec{s} = +mg\ ds$)allo spostamento ed



integrando il cammino si attiene $\int_B^C \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_B^C -mg\, ds = -mg \int_B^C ds = -mgh$ nel primo caso e $\int_D^A \vec{F} \bullet d\vec{s} = mgh$ nel secondo la cui somma fa zero.
Nella forza peso quello che conta è la variazione di quota (il lavoro è nullo nei cammini orizzontali) ed in particolare se l'asse di riferimento z è verso l'alto $U = mgz$ avendo preso come quota di riferimento $z = 0$ (quindi se passo da quota zero a quota h la variazione di energia potenziale è $\Delta U = mgh - 0 = mgh$).

Se avessi la quota z_0 come riferimento $U = mg(z - z_0)$. Se avessi preso l'asse z verso il basso $U = -mgz$.

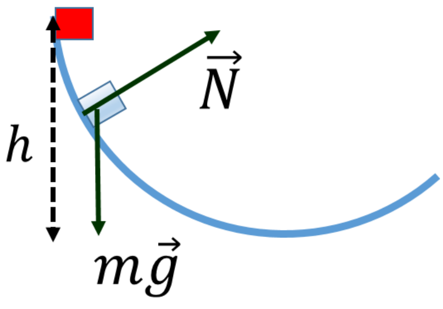
La forza peso deriva da quella di gravitazione universale ed anche questa è di tipo conservativo. Al momento diamo senza dimostrazione il potenziale $U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$.

La forza elastica (quindi siamo in regime lineare) è essenzialmente una forza in una dimensione ed è conservativa perché in una dimensione (asse x) il lavoro per andare da A a B e ritornare ad A lungo lo **stesso cammino rettilineo** è sempre nullo $L = \int_A^A \vec{F}_e \bullet d\vec{s} = \int_a^a F_{ex} dx = 0$.
Tale condizione vale per qualunque forza unidimensionale funzione di x.
Prendiamo come posizione di riferimento la condizione di riposo $x = 0$, $U = -L = -\int_0^x (-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2$: l'energia potenziale elastica varia quadraticamente con la deformazione.

5) Risoluzione di problemi con l'energia

Nelle dimostrazioni precedenti il tempo non compare, il lavoro può essere svolto in un tempo breve o lungo, solo la potenza tiene conto della rapidità di svolgimento del lavoro.
Abbiamo già visto che la legge di Newton invece richiede la risoluzione di un'equazione differenziale in cui il tempo è il parametro importante.
Se nella risoluzione, la quantità rilevante è la velocità che deve essere calcolata in posizioni particolari e ci sono solo forze conservative, in particolare la forza peso, il teorema lavoro-energia permette di ricavare la velocità senza risolvere nessuna equazione differenziale.

Esempio: un corpo di massa m parte da fermo da un'altezza h e seguendo una guida circolare liscia raggiunge il punto più basso, trovare in questo punto la velocità.
Dal punto di vista della risoluzione della legge di Newton le forze in gioco sono la forza peso che rimane costante e la reazione normale alla guida che cambia da punto a punto e quindi non permette una integrazione nel tempo dell'accelerazione che dipende dalla posizione angolare. Invece dal punto di vista energetico, **scelto come riferimento per l'energia potenziale la quota del punto più basso**, il blocchetto possiede una energia potenziale iniziale $U_i = mgh$ e finale $U_f = 0$, l'energia cinetica invece è $K_i = 0$ e $K_f = \frac{1}{2}mv^2$, essendo la guida liscia non ci sono attriti e si conserva l'energia



$E_i = E_f$ da cui $mgh = \frac{1}{2}mv^2$
$\rightarrow v^2 = 2gh$ questa relazione assomiglia alla relazione cinematica $v^2 - {v_i}^2 = 2ax$ valida per accelerazione costante ma nel caso della guida circolare (al contrario del piano inclinato che ha pendenza costante) l'accelerazione punto per punto non è costante
$\rightarrow v = \sqrt{2gh}$ questo risolve il problema.

Se però una delle domande fosse il tempo di discesa, la soluzione energetica non contiene direttamente il tempo.
In tal caso bisognerebbe, ad esempio, utilizzare coordinate polari, proiettare la legge di Newton su un asse radiale e uno tangenziale, risolvere l'equazione differenziale.

6) Proprietà dell'energia potenziale

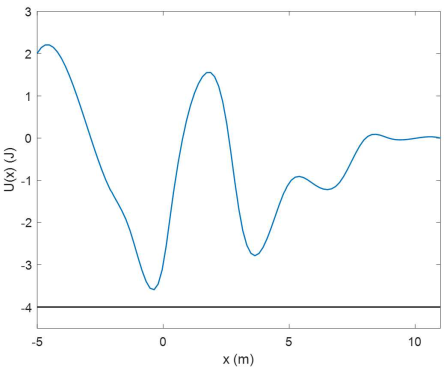
L'energia potenziale è definita a partire dalla forza conservativa $U = -\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s}$.
Al contrario della forza, l'energia potenziale è un concetto scalare e ci possiamo domandare se la sua sola conoscenza possa permettere di ricavare la forza conservativa.

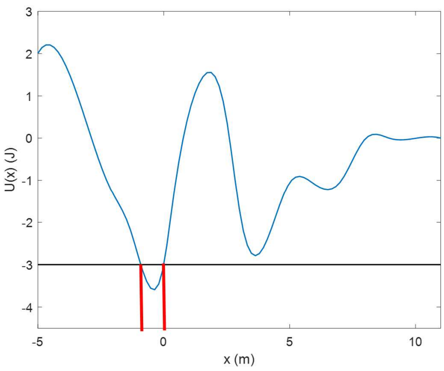
Iniziamo da una dimensione $U(x) = -\int_A^x F_x\, dx$, questo esprime che l'energia potenziale è la funzione primitiva e la funzione $-F_x(x)$ è la sua derivata quindi $F_x(x) = -\frac{dU}{dx}$.

Nel caso di più dimensioni, l'energia potenziale sarà funzione di più variabili $U(x, y, z) = -\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s}$ e la generalizzazione della derivata in questo caso è la derivata parziale per ciascuna coordinata che è simboleggiata dall'operatore nabla $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ e la forza conservativa sarà $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(x, y, z)$ (si chiama operazione di gradiente).
Vediamolo con un esempio. L'energia potenziale gravitazionale è $U = -G\frac{m_1 m_2}{r} = -G'\frac{1}{r}$ dove per semplicità abbiamo raccolto tutte le quantità constanti sotto $G' = Gm_1 m_2$.
La distanza dalla sorgente dell'interazione è $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e quindi
$U(x, y, z) = -G'\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -G'(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$.
Se deriviamo (parzialmente) rispetto a x (e quindi y e z sono costanti per questa derivata) $\frac{\partial U}{\partial x} = -G'\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\, 2x\right) = G'\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = G'\ \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^1}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = G'\frac{1}{r^2}\ \frac{x}{r}$
Ripetendo su y e su z
$\frac{\partial U}{\partial y} = G'\frac{1}{r^2}\ \frac{y}{r}$ e
$\frac{\partial U}{\partial z} = G'\frac{1}{r^2}\ \frac{z}{r}$.

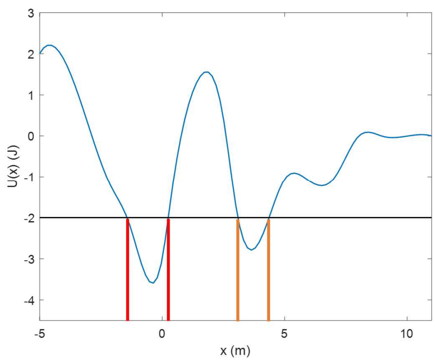
Queste derivate (cambiate di segno) sono le componenti della forza gravitazionale
$\vec{F} = -G'\left(\frac{1}{r^2}\ \frac{x}{r},\ \frac{1}{r^2}\ \frac{y}{r},\ \frac{1}{r^2}\ \frac{z}{r}\right) = -G'\ \frac{1}{r^2}\ \left(\frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ \frac{z}{r}\right)$ il vettore è $\vec{r} = (x, y, z)$ diviso il suo modulo, cioè il versore $\hat{r}$ da cui $\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\ \hat{r}$, relazione che ci aspettiamo per la forza gravitazionale.

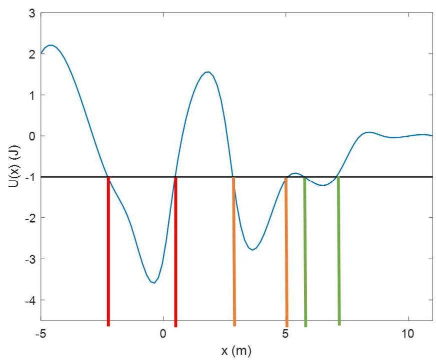
Analizziamo un caso unidimensionale, nelle figure che seguono la curva blu rappresenta il grafico della funzione energia potenziale $U(x)$ della risultante delle forze conservative.
Escludendo la presenza di altre forze, in particolare forze dissipative, l'energia si conserva e un punto materiale è sottoposto all'azione della forza (netta) conservativa che ha generato questo potenziale.
In particolare questo corpo puntiforme di massa m si muove lungo l'asse x ed ha energia $E = K + U$ o riscritta in altri termini $K = E - U$.
Considerando che il modulo della velocità del corpo è $v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}$ è necessario che $E - U(x) \geq 0$ per ottenere un valore reale della velocità.
Occorre perciò confrontare l'energia (totale) con il valore dell'energia potenziale: nei grafici sono presenti delle linee nere che rappresentano il valore dell'energia posseduta dal punto materiale.





Nel primo grafico l'energia è pari a $E = -4\,J$ e si vede dal grafico che il minimo assoluto di $U(x)$ è superiore a -4 J, non è possibile per il corpo avere tale energia altrimenti la velocità è immaginaria.
Aumentando l'energia a $E = -3\,J$esiste un intervallo di valori di x (**regione permessa al moto**) per cui la condizione di realtà di v è verificata e corrisponde all'intervallo tra le due barre rosse, gli altri intervalli sono **regioni proibite**. Il corpo si può muovere in questo intervallo e la velocità si annulla per i valori di x corrispondenti a queste barre rosse che sono detti **punti di inversione del moto**: infatti il corpo che si avvicina a tali punti ha la velocità che diminuisce, si annulla nel punto di inversione $E - U(x_{inversione}) = 0$, poi aumenta ma con verso opposto.



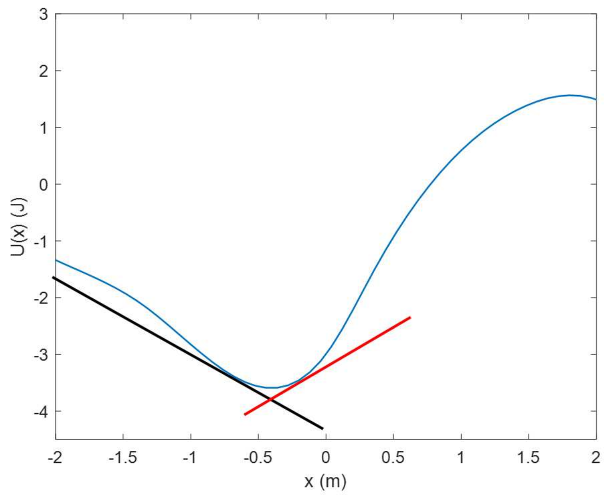


Aumentando l'energia a $E = -2\,J$esistono due regioni permesse, quella indicata dalla barre rosse (intervallo di prima che si è allargato) e quella delle barre ocra. Se il corpo è inizialmente nella regione rossa, non ha modo di raggiungere la regione ocra e viceversa, infatti esiste tra le due regioni permesse una **barriera di potenziale** che lo impedisce con altezza circa $4\,J$ (dal livello $E = -2\,J$).
Aumentando ulteriormente l'energia a $E = -1\,J$ le due regioni di prima si allargano e si aggiunge una terza regione permessa che è quella verde. La barriera che separa la regione verde da quella

ocra non è alta (in energia) ma classicamente o il corpo ha l'energia superiore alla barriera o altrimenti rimane confinato nella regione permessa.
In tutte queste regioni permesse il moto è perpetuo non essendoci dissipazione.

Osserviamo che questa previsione di confinamento per un tempo infinito non vale per corpi di massa sufficientemente piccola per i quali la Meccanica Classica deve essere sostituita dalla Meccanica Quantistica. Infatti il comportamento ondulatorio dei corpi permette l'effetto tunnel, ovvero se la barriera di potenziale non è molto alta e con estensione spaziale abbastanza stretta, il corpo che si trova da una parte può attraversarla e passare dall'altra parte.

Infine, se $E > \max U(x)$ tutte le regioni sarebbero permesse.
Analizziamo ora in un piccolo intorno di un minimo dell'energia potenziale in posizione x_m che avrà valore $U_m = U(x_m)$. Per punti precedenti il minimo ($x < x_m$), $U(x) > U_m$ (funzione **decrescente** e la pendenza è **negativa, curva nera)**; per punti successivi al minimo ($x > x_m$), $U(x) > U_m$ (funzione **crescente** e la pendenza è **positiva, curva rossa)**.



La forza è $F_x = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$ e nel minimo è nulla, il minimo è quindi un **punto di equilibrio**, ma la derivata è proprio la pendenza e quindi per punti precedenti il minimo la forza ha componente positiva (opposta alla pendenza) mentre per punti successivi al minimo la componente è negativa (opposta alla pendenza): la forza tende a riportare il corpo verso il punto di mimino (forza di richiamo).
Una qualunque perturbazione che tende a spostare dal minimo il corpo è contrastata dalla forza: ciascun punto di minimo di $U(x)$ è un **punto di equilibrio stabile**.

In un punto di massimo la forza è nulla e, in un intorno di un massimo, le pendenze sono opposte a quelle trovate per un punto di minimo. Perciò la forza tende ad allontanare il corpo dalla posizione del massimo. Se partiamo col corpo esattamente nel punto di massimo e una qualunque perturbazione lo sposta anche di poco da questo punto, la forza legata ad $U(x)$ lo allontanerà definitivamente dal massimo: ogni massimo di $U(x)$ è un **punto di equilibrio instabile**.

Nel caso la curva di energia potenziale avesse una successione di punti di equilibrio (e quindi in tutto un intervallo $U(x) = cost$ e perciò $F_x = 0$) questi sarebbero **punti di equilibrio indifferente**.

Anche se non lo utilizzeremo sovente durante il corso, osserviamo che attorno ad un punto di minimo x_m possiamo approssimare $U(x)$ con un polinomio di secondo grado $y_2 = a + b(x -$

$x_m) + c(x - x_m)^2$. In particolare il valore del minimo sia $U(x_m)$ e quindi imponiamo che questo polinomio nello stesso punto abbia:

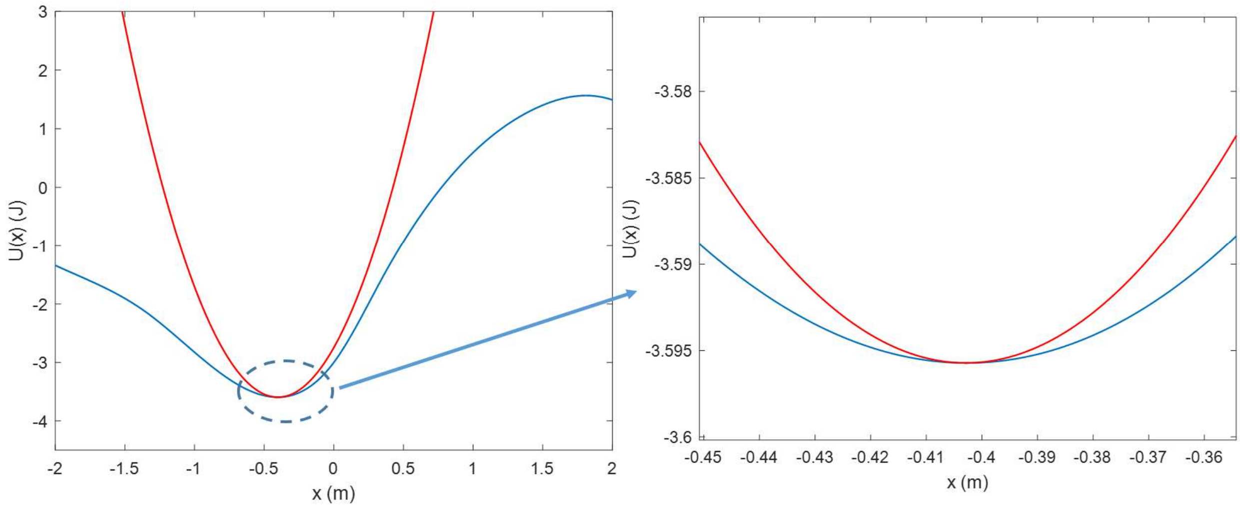
- lo stesso valore $U(x_m) = a$
- la stessa derivata prima $\frac{dU}{dx}|_{x=x_m} = 0$ (è un minimo pendenza nulla, ovvero la forza è nulla)
- la stessa derivata seconda $\frac{d^2U}{dx^2}|_{x=x_m} = \beta$

da cui $\frac{dy_2}{dx}|_{x=x_m} = b = 0$ e derivata seconda $\frac{d^2y_2}{dx^2}|_{x=x_m} = 2c = \beta$

$\rightarrow y_2 = U(x_m) + \frac{1}{2}\beta(x - x_m)^2$.

A parte la costante (e un'energia potenziale è definita a meno di una costante e la possiamo trascurare), l'energia potenziale è approssimata da $\frac{1}{2}\beta(x - x_m)^2$, ma $x - x_m$ è la differenza con la posizione di equilibrio ovvero è la "deformazione" $\Delta x \rightarrow U - U(x_m) \cong \frac{1}{2}\beta(\Delta x)^2$.

In questa forma approssimata è identica all'energia potenziale elastica e, in effetti attorno al punto di minimo, la forza collegata ad U si comporta come se fosse una forza di richiamo di una molla di costante elastica $\beta = \frac{d^2U}{dx^2}|_{x=x_m}$.



Dalla figura si nota che in un intorno di pochi centimetri l'approssimazione parabolica rossa è valida.