IV PARTE: Urti

1) Urti tra corpi puntiformi non vincolati

Questo sarà un primo esempio di sistema formato da più punti, argomento che verrà trattato successivamente in modo esteso includendo anche i corpi continui e rigidi.

Vogliamo analizzare un sistema formato da due punti materiali, 1 e 2, **non vincolati** che si avvicinano e per un **breve intervallo di tempo** $\Delta t = t_f - t_i$ interagiscono fra loro (per corpi macroscopici vengono a contatto): si dice che i due punti stanno urtando tra di loro.

Le forze che agiscono per un tempo breve sono chiamate **forze impulsive $\vec{F}_I$**.

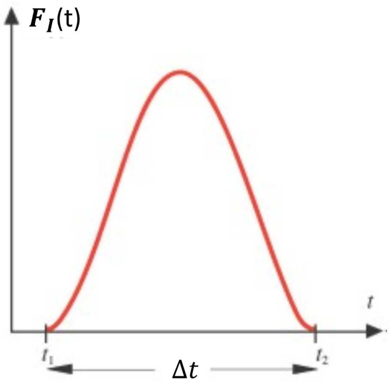
Considerando il punto 1, la forza risultante su di esso $\vec{F}_1$ sarà la somma delle forze che rappresentano le interazioni tra 1 e gli altri corpi non coinvolti nell'urto $\vec{F}_{1ncu}$ (ad esempio la Terra e la corrispondente forza peso, la forza normale al piano di appoggio se i 2 corpi si muovono lungo tale piano, etc.) e la forza impulsiva che 2 applica a 1 $\vec{F}_{I2\to 1}$ perciò

$$\vec{F}_{1ncu} + \vec{F}_{I2\to 1} = m_1\vec{a}_1$$

In modo analogo, considerando il punto 2,

$$\vec{F}_{2ncu} + \vec{F}_{I1\to 2} = m_2\vec{a}_2$$

L'osservazione che prima dell'urto le forze con gli altri corpi non modificavano apprezzabilmente la velocità di 1 e 2 mentre, dopo l'urto, le loro velocità sono profondamente modificate, fa comprendere che le forze che si scambiano 1 e 2 nel breve tempo Δt sono molto intense ed il loro andamento è del tipo mostrato in figura: sono nulle al di fuori dell'intervallo Δt, durante Δt aumentano fino ad un massimo e poi diminuiscono fino ad annullarsi.

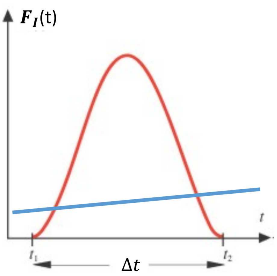


Considerando corpi macroscopici, queste forze sono dovute alla deformazione che subiscono i due corpi durante l'urto: nell'immagine una pallina da golf che, quando viene colpita dalla mazza, passa dalla forma sferica ad una forma schiacciata indicando una profonda deformazione e conseguentemente una intensa forza applicata dalla mazza per ottenere tale deformazione.

Con questa osservazione possiamo utilizzare l'**approssimazione impulsiva**: durante l'urto (nell'intervallo Δt) **si possono trascurare le forze non impulsive** e quindi

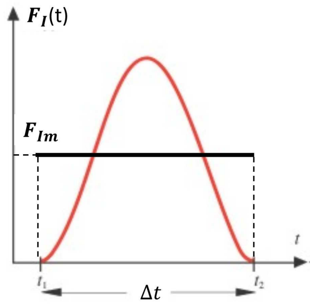
$$\vec{F}_{I2\to 1} \cong m_1\vec{a}_1$$
$$\vec{F}_{I1\to 2} \cong m_2\vec{a}_2$$

L’approssimazione è tanto migliore quanto più breve è l’intervallo di tempo.
Infatti abbiamo visto che **l’impulso di una forza** $\vec{I}$ è l’integrale nel tempo di quella forza, in questo caso l’integrale è calcolato nell’intervallo Δt. Questo equivale all’area sottesa dalla curva rossa della $F_I(t)$ confrontata con l’area sotto la curva blu che rappresenta le forze non impulsive meno intense e la cui variazione nel tempo è più lenta.
Se l’interazione diviene sempre più breve, per ottenere lo stesso effetto sulle velocità, la forza impulsiva deve avere un massimo più grande mentre, per le altre forze, l’impulso tende a zero con Δt.



L’impulso della risultante su 1
$\vec{I}_1 = \int(\vec{F}_{1ncu} + \vec{F}_{I2\to1})dt \cong \int(\vec{F}_{I2\to1})dt$
e analogo per 2
$\vec{I}_2 = \int(\vec{F}_{2ncu} + \vec{F}_{I1\to2})dt \cong \int(\vec{F}_{I1\to2})dt$
questo vuol dire trascurare l’area sottesa dalla curva blu rispetto a quella sottesa dalla curva rossa, sempre nell’intervallo Δt.

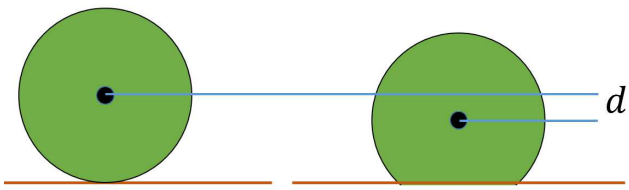
Un’utile concetto è la **forza media** nel tempo: l’integrale $\int(\vec{F}_{I2\to1})dt$ ha un valore (l’area sotto la curva rossa) che può essere espresso come l’area di un rettangolo di base Δt e altezza $|\vec{F}_{Im}|$ che rappresenta la forza costante che in Δt produce lo stesso valore dell’impulso $\int(\vec{F}_{I2\to1})dt = \vec{F}_{Im}\,\Delta t$.
È ovvio che la forza media, sebbene fornisca lo stesso effetto, avrà un valore inferiore a quello massimo.



Il teorema dell’impulso ci mostra che la variazione della quantità di moto nell’intervallo di tempo in cui agisce la forza impulsiva sarà uguale a $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_{2f} - \vec{p}_{2i} = \int(\vec{F}_{I2\to1})dt$.
Lo stesso risultato si ha per il punto 2: $\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_{2f} - \vec{p}_{2i} = \int(\vec{F}_{I1\to2})dt$.

Per rendere più evidente quanto esposto vediamo un esempio, il rimbalzo di una palla di raggio $R = 5\ cm$ e massa $m = 100\ g$ che cade, partendo da ferma, da un’altezza $h = 2\ m$ rispetto al pavimento orizzontale. Convertiamo in unità S.I.: $m = 100\ g = 0.100\ kg$, $R = 5\ cm = 0.05\ m$.
Assumiamo un sistema di riferimento con l’asse z verticale verso l’alto (non useremo i pedici z poiché la velocità avrà sempre componente solo verticale). La palla converte l’energia potenziale $U_i = mgh$ in energia cinetica $K_f = \frac{1}{2}mv_f{}^2$ da cui $v_f = -\sqrt{2gh} = 6.2642\frac{m}{s} \approx 6.3m/s$ (2 cifre significative), questa è la componente della velocità immediatamente prima dell’urto $v_f = v_{ui} < 0$. Nell’urto con il terreno, che applicherà una forza normale verticale, se assumiamo che l’energia durante l’urto venga conservata ($E_{uf} = E_{ui}$ ovvero $\frac{1}{2}mv_{uf}{}^2 = \frac{1}{2}mv_{ui}{}^2$) la velocità si deve invertire $v_{uf} = -v_{ui} > 0$ per cui la variazione di quantità di moto $\Delta p = mv_{uf} - mv_{ui} = -2mv_{ui} = 1.2528\ kg\frac{m}{s} \approx 1.3kg\ m/s$.

Supponiamo ora che la palla si deformi $d = 2\ cm = 0.02\ m$, quindi, da quando giunge a contatto con il terreno, il centro della palla si muove di $-d$ prima di fermarsi.



Assumiamo che la decelerazione sia **costante** in modo da valutare la velocità media come $v_m = \frac{0+v_{ui}}{2} = \frac{1}{2}v_{ui} = -3.1321\ m/s$ (formula 6 appendice dispensa cinematica A2) per cui il tempo per fermarsi è $t_s = \frac{-d}{v_m} = 0.006386\ s \approx 0.0064\ s = 6.4\ ms$.

Supponiamo ulteriormente che durante la fase di espansione della palla per tornare alle dimensioni normali l'accelerazione sia la stessa, allora il tempo di interazione $\Delta t = 2t_s = 0.01277\ s \approx 0.013\ s$.

La forza impulsiva media applicata durante l'urto è $F_{Im} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 98.100\ N \approx 98\ N$ da confrontare con la forza peso della palla $mg = 0.981\ N$, ovvero una forza 100 volte più grande.

Se la palla fosse stata di materiale più rigido e quindi la deformazione d inferiore, la forza media sarebbe inversamente proporzionale e quindi ancora maggiore: ad esempio una sfera di acciaio (cava per avere la stessa massa) con deformazione probabilmente $d{\sim}1mm$ e $\Delta t{\sim}6.3855 \cdot 10^{-4}s \approx 6.4 \cdot 10^{-4}s$ sarebbe sottoposta ad una forza media $F_{Im} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 1.9620 \cdot 10^3\ N \approx 2.0 \cdot 10^3\ N$ quindi l'equivalente del peso di una massa di 200 kg.

Osservazione 1: Si è assunta la conservazione dell'energia ma durante la deformazione l'energia può essere dissipata, inoltre si è assunto che anche il fenomeno si ripresenti con le stesse modalità per il ritorno alla forma indeformata mentre è possibile eccedere il limite elastico ed entrare nel regime di plasticità e quindi il corpo potrebbe deformarsi permanentemente. Questo effetto si utilizza quando si usa un martello per forgiare un metallo.

Osservazione 2: Nell'esempio è indicato un utile metodo per valutare i tempi di interazione dei due corpi che urtano tramite la loro deformazione in ipotesi di decelerazione costante. D'altra parte, se pensiamo di approssimare il corpo (palla) con una molla di costante elastica k, la conversione di tutta l'energia cinetica in energia elastica di deformazione comporterebbe $\frac{1}{2}m{v_{ui}}^2 = \frac{1}{2}kd^2$ da cui $d = \sqrt{\frac{m}{k}}v_{ui}$, questa deformazione avviene con decelerazione $-kx = ma \rightarrow a = -\frac{kx}{m}$ quindi variabile. Inoltre, in questa rappresentazione, ogni parte della palla (molla) si deforma in modo uguale mentre nell'urto la deformazione è maggiore vicino al contatto.

Osservazione 3: un allungamento del tempo di interazione Δt diminuisce la forza media. Questo spiega l'evoluzione delle carrozzerie delle auto che all'inizio erano molto rigide però le forze trasmesse ai passeggeri potevano causare effetti molto gravi; utilizzando parti deformabili nella carrozzeria che allungano i tempi di interazione diminuiscono le forze trasmesse, l'auto dopo l'urto è accartocciata ma l'abitacolo è protetto. Inoltre si aggiungono sacche piene di gas in posizioni opportune che si gonfiano al momento dell'urto (airbag) che sono molto deformabili.

Utilizziamo il terzo principio $\vec{F}_{I2\to1} = -\vec{F}_{I1\to2}$, gli impulsi sono uguali e opposti e $\Delta\vec{p}_2 = -\Delta\vec{p}_1$ ovvero $\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \vec{0} \to \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} - \vec{p}_{1i} - \vec{p}_{2i} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \vec{0}$
dove si è definito la **quantità di moto (totale) del sistema** dei due punti $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ che durante l'urto non viene modificata e quindi è una quantità conservata (nel caso di punti materiali liberi).

Osservazione: occorre specificare che i corpi siano liberi di muoversi (in un piano o nello spazio), se almeno uno è costretto da un vincolo a poter solo ruotare senza poter traslare (p.es. asta vincolata o una porta), il vincolo introduce una forza impulsiva (la sua reazione vincolare) che non permette la conservazione della quantità di moto: si conserva infatti il momento angolare se il polo viene messo nella posizione del vincolo in modo da eliminare il momento della reazione vincolare. Questi sono corpi estesi che richiedono l'introduzione del concetto di corpo rigido e momento di inerzia che vedremo successivamente.

La definizione di $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ potrebbe essere interpretata come $M\vec{V}$ in cui la massa è necessariamente quella del sistema $M = m_1 + m_2$ e la velocità è perciò $\vec{V} = \frac{\vec{P}}{M} = \frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{M}$, la velocità del sistema nel suo complesso. Proseguendo in questa linea di pensiero possiamo derivare la velocità $\frac{d}{dt}\vec{V} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{M}\right) = \frac{m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2}{M} = \vec{A}$ si ottiene l'accelerazione del sistema.
Se invece pensiamo che questa velocità sia la derivata di una posizione avremo $\vec{V} = \frac{d}{dt}(\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{M})$ e questo permette di definire la posizione $\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{M}$ come la posizione del sistema: tale posizione è la posizione del **centro di massa** (CM) del sistema, il punto materiale in cui si pensa sia concentrata la massa del sistema, con velocità $\vec{V}$ e accelerazione $\vec{A}$.

Osserviamo che la legge di Newton per il CM è $M\vec{A} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ quindi si sommano tutte le forze applicate al sistema (anche se applicate a punti materiali differenti). Però, come verrà mostrato successivamente, le forze che modificano il moto del CM sono solo quelle con i corpi esterni al sistema, le forze che si scambiamo i corpi che formano il sistema, per il terzo principio, sono uguali e opposte e quindi si elidono a coppie: questo è il motivo per cui in un urto si conserva la quantità di moto del sistema (o quantità di moto del CM $M\vec{V} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$), infatti si trascurano le forze esterne non impulsive.

2) Urti ed energia

In un urto tra corpi puntiformi si conserva la quantità di moto del sistema, invece l'energia che dipende dal lavoro delle forze impulsive potrebbe non conservarsi se queste forze non sono conservative: gli urti possono perciò essere

i) **urti elastici** se si conserva l'energia, $E_f = E_i$,
ii) **urti anelastici** se non si conserva l'energia, $E_f \neq E_i$, e solitamente ne viene dissipata una parte $E_{diss} = E_i - E_f$>0.

Poiché la durata dell'urto è breve, i corpi interagendo non hanno variazioni apprezzabili della loro posizione da cui non c'è una variazione essenziale dell'energia potenziale quindi la parte di energia a cui ci si riferisce negli urti è quella cinetica:
quindi negli urti elastici $K_f = K_i$ mentre per quelli anelastici si può introdurre un **coefficiente di restituzione** ε che fornisce l'energia dopo l'urto $K_f = \varepsilon^2 K_i$, coefficiente solitamente minore di 1 ma se ci sono trasferimenti con l'energia interna dei corpi potrebbe anche essere maggiore di 1 (per esempio nell'urto esplode la carica contenuta in un corpo).

Tra gli urti anelastici vi sono inoltre gli **urti totalmente anelastici** in cui la dissipazione è la massima possibile compatibilmente con la conservazione della quantità di moto del sistema. In tal caso i due punti proseguono dopo l'urto rimanendo attaccati l'uno all'altro, ovvero con la velocità del CM.

3) Urti elastici in una dimensione

Supponiamo che l'urto avvenga tra due punti materiali (non vincolati) in una sola direzione lungo cui poniamo l'asse x. Semplificando le precedenti relazioni vettoriali, le velocità iniziali e finali hanno sola la componente x e le chiameremo v_{1i}, v_{2i}, v_{1f} e v_{2f}.
Conservazione della quantità di moto (lungo x): $m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$ inoltre
Conservazione dell'energia cinetica $\frac{1}{2} m_1 {v_{1i}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_{1f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2f}}^2$

Riscriviamo il sistema di equazioni $-m_2(v_{2f} - v_{2i}) = m_1(v_{1f} - v_{1i})$ e la seconda
$\frac{1}{2} m_2 {v_{2i}}^2 - \frac{1}{2} m_2 {v_{2f}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_{1f}}^2 - \frac{1}{2} m_1 {v_{1i}}^2$ questa la trasformiamo in
$-\frac{1}{2} m_2({v_{2f}}^2 - {v_{2i}}^2) = \frac{1}{2} m_1({v_{1f}}^2 - {v_{1i}}^2)$ semplificando e ricordando un prodotto notevole
$-m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) = m_1(v_{1f} - v_{1i})(v_{1f} + v_{1i})$, utilizziamo la prima equazione per semplificare termini uguali nei due membri

$$v_{2f} + v_{2i} = v_{1f} + v_{1i}$$

Da cui

$$v_{2f} = v_{1f} + v_{1i} - v_{2i}$$

Questa la possiamo sostituire nella prima equazione
$-m_2(v_{1f} + v_{1i} - v_{2i} - v_{2i}) = m_1(v_{1f} - v_{1i})$ che riordinata fornisce

$$-m_2 v_{1f} - m_2 v_{1i} + 2m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} - m_1 v_{1i}$$
$$(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2)v_{1f}$$

Da cui

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \text{ (eq. 1)}$$

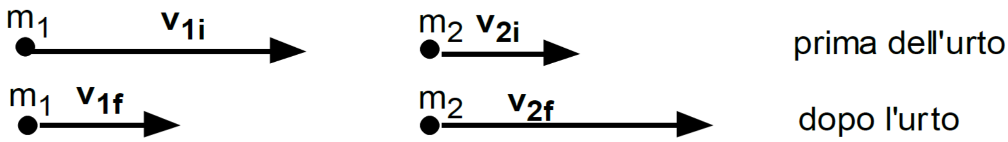
Sostituendo in $v_{2f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} + v_{1i} - v_{2i}$ si ottiene

$$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} v_{2i} \text{ (eq.2)}$$

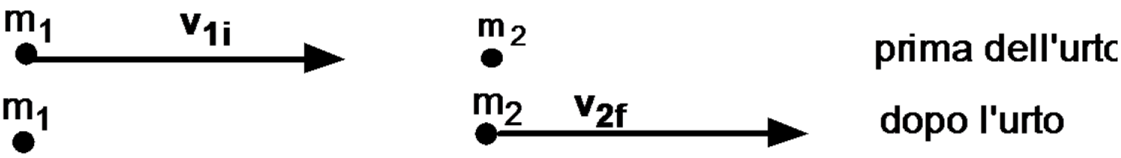
Queste due equazioni risolvono il problema di trovare le velocità finali conoscendo masse e velocità iniziali dei corpi.
Si osservi che a denominatore compare la massa totale del sistema $M = m_1 + m_2$.

Casi particolari:

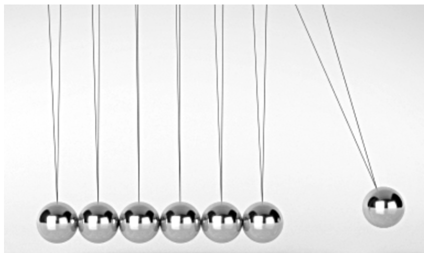
a) Masse uguali $m_1 = m_2 = m$: $v_{1f} = \frac{2mv_{2i}}{2m} = v_{2i}$ e $v_{2f} = \frac{2mv_{1i}}{2m} = v_{1i}$ si vede che le velocità dei corpi si scambiamo



Se il corpo 2 è in quiete.



Questo avviene ad esempio nei pendoli di Newton analizzati a coppie. L'urto avviene in orizzontale e la fune può solo trasmettere la tensione verticalmente e quindi, anche se la tensione fosse impulsiva questa non modificherebbe quanto avviene in orizzontale, perciò si conserva la quantità di moto in orizzontale (non abbiamo preso in considerazione la forza peso verticale perché rientra nelle forze non impulsive anche se è necessaria per la sferetta esterna di destra che converte energia potenziale in energia cinetica). Da questo risultato, le sferette si scambiano la velocità (immediatamente prima dell'urto quella a destra ha inizialmente una velocità diversa da zero e quella a sinistra è in quiete, immediatamente dopo, quella a destra è in quiete e quella a sinistra ha la stessa velocità) e l'ultima della seria partirà con la stessa velocità con cui è arrivata la prima, ovviamente se gli urti sono effettivamente elastici ma questo non accade esattamente e dopo un certo tempo i pendoli si fermano (l'energia è stata dissipata sia trasferendola all'aria, sia in energia interna scaldando le sferette).



b) Se il corpo 2 è fermo inizialmente

$v_{2i} = 0$: $v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_{1i}$ e $v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$

-Se inoltre la massa di 1 è molto maggiore di quella di 2: $m_1 \gg m_2$ e quindi m_2 è trascurabile, $M \cong m_1$:

$v_{1f} \cong v_{1i}$ e $v_{2f} \cong 2v_{1i}$

Ovvero il corpo 1 massivo prosegue con velocità inalterata (non si accorge dell'urto) mentre il corpo 2 acquista una velocità doppia del corpo 1.

-Se invece la massa di 2 è molto maggiore di quella di 1: $m_1 \ll m_2 \cong M$ e quindi m_1 è trascurabile:

$v_{2i} = 0$: $v_{1f} = -v_{1i}$ e $v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_{1i} \cong 0$

Ovvero il corpo 2 massivo rimane in quiete (non si accorge dell'urto) mentre il corpo 1 rimbalza indietro invertendo la velocità.

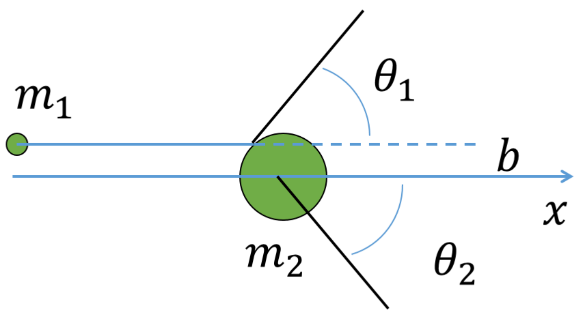
4) Urti elastici in 2 dimensioni

Il moto avviene nel piano xy. Come nel caso precedente abbiamo

- Conservazione della quantità di moto
  (lungo x): $m_1 v_{1xi} + m_2 v_{2xi} = m_1 v_{1xf} + m_2 v_{2xf}$
  (lungo y): $m_1 v_{1yi} + m_2 v_{2yi} = m_1 v_{1yf} + m_2 v_{2yf}$ inoltre
- Conservazione dell'energia cinetica $\frac{1}{2} m_1 {v_{1i}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_{1f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2f}}^2$

Perciò 3 equazioni ma le incognite sono le 4 componenti finali: $\vec{v}_{1f} = (v_{1xf}, v_{1yf})$ e $\vec{v}_{2f} = (v_{2xf}, v_{2yf})$ e quindi occorre fornire (ad esempio misurandola) una quarta grandezza per ricavare le altre 3 rimanenti.
Questa grandezza è in genere l'angolo di uscita dopo l'urto di uno dei due corpi.

Se introduciamo gli angoli delle velocità finali rispetto alla direzione incidente di 1 (asse x) e supponiamo che 2 sia inizialmente fermo $v_{2i} = 0$:
Conservazione della quantità di moto
  (lungo x): $m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$
  (lungo y): $0 = m_1 v_{1f} \sin\theta_1 - m_2 v_{2f} \sin\theta_2$
  inoltre
- Conservazione dell'energia cinetica $\frac{1}{2} m_1 {v_{1i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_{1f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2f}}^2$



Questo sistema di equazioni è sufficiente per trovare la soluzione.

Se, per semplicità assumiamo che i corpi urtanti macroscopici siano sferici e non deformabili, a grande distanza sono ovviamente assimilabili a corpi puntiformi. Però durante l'interazione la loro dimensione conta e l'urto viene a dipendere dal **parametro d'urto** b che è la distanza tra la direzione incidente di 1 e il centro di 2. L'angolo di uscita dipende da b in modo semplice (il prolungamento del raggio nel punto di contatto è la bisettrice dell'angolo fra direzione incidente di 1 (blu) e direzione uscente (nera) della figura precedente e, per ogni parametro d'urto, un angolo di deflessione viene determinato e quindi il problema si risolve in funzione del parametro d'urto. Questa trattazione però esula degli scopi del corso.

Per vedere alcuni casi particolari procediamo col calcolo.

Ricaviamo $\cos\theta_1 = \frac{m_1 v_{1i} - m_2 v_{2f}\cos\theta_2}{m_1 v_{1f}}$ ed il quadrato $(\cos\theta_1)^2 = (\frac{m_1 v_{1i} - m_2 v_{2f}\cos\theta_2}{m_1 v_{1f}})^2$.
Ricaviamo $\sin\theta_1 = \frac{m_2 v_{2f}\sin\theta_2}{m_1 v_{1f}}$ ed il quadrato $(\cos\theta_1)^2 = 1 - (\sin\theta_1)^2 = 1 - (\frac{m_2 v_{2f}\sin\theta_2}{m_1 v_{1f}})^2$
Ovvero ${m_1}^2{v_{1f}}^2 - {m_2}^2{v_{2f}}^2((\sin\theta_1)^2 + (\cos\theta_1)^2) = {m_1}^2{v_{1i}}^2 - 2m_1 m_2 v_{1i} v_{2f}\cos\theta_2$
Moltiplicando per $\frac{1}{2}$ e dividendo per m_1: $\frac{1}{2}m_1{v_{1f}}^2 - \frac{m_2}{m_1}\frac{1}{2}m_2{v_{2f}}^2 = \frac{1}{2}m_1{v_{1i}}^2 - 2m_2 v_{1i} v_{2f}\cos\theta_2$
Compaiono termini energetici $E_{1i} = \frac{1}{2}m_1{v_{1i}}^2$, $E_{1f} = \frac{1}{2}m_1{v_{1f}}^2$ e $E_{2f} = \frac{1}{2}m_2{v_{2f}}^2$
$\to E_{1f} - \frac{m_2}{m_1}E_{2f} = E_{1i} - m_2 v_{1i} v_{2f}\cos\theta_2$ e dalla conservazione dell'energia $E_{1i} = E_{1f} + E_{2f} \to$ $E_{1f} - \frac{m_2}{m_1}E_{2f} = E_{1f} + E_{2f} - m_2 v_{1i} v_{2f}\cos\theta_2 \to -\frac{m_2}{m_1}E_{2f} = E_{2f} - m_2 v_{1i} v_{2f}\cos\theta_2 \to (1 + \frac{m_2}{m_1})E_{2f} = m_2 v_{1i} v_{2f}\cos\theta_2 \to \frac{M}{m_1}E_{2f} = m_2 v_{1i} v_{2f}\cos\theta_2 \to \frac{M}{m_1}\frac{1}{2}m_2{v_{2f}}^2 = m_2 v_{1i} v_{2f}\cos\theta_2$

Semplificando si ottiene $v_{2f} = 2\frac{m_1}{M}v_{1i}\cos\theta_2$ da cui possiamo calcolare l'energia del corpo 2:
$E_{2f} = E_{1i}\frac{4m_1 m_2}{M^2}(\cos\theta_2)^2$.
Per il corpo 1: $m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\cos\theta_1 + 2\frac{m_1 m_2}{M}v_{1i}(\cos\theta_2)^2 \to v_{1f}\cos\theta_1 = v_{1i} - 2\frac{m_2}{M}v_{1i}(\cos\theta_2)^2 \to$
$v_{1f} = v_{1i}\frac{(1 - 2\frac{m_2}{M}(\cos\theta_2)^2)}{\cos\theta_1}$ e l'energia dopo l'urto
$E_{1f} = E_{1i}(1 - \frac{4m_1 m_2}{M^2}(\cos\theta_2)^2)$

Dai risultati si vede che fornendo le masse dei corpi, la velocità v_{1i} e i due angoli θ_1 e θ_2 il problema è univocamente risolto.

Caso particolare: massa $m_1 = m_2$
L'energia di 2 è $E_{2f} = E_{1i}(\cos\theta_2)^2$ e la sua velocità $v_{2f} = v_{1i}\cos\theta_2$
L'energia di 1 $E_{1f} = E_{1i}(1 - (\cos\theta_2)^2) = E_{1i}(\sin\theta_2)^2$ e la sua velocità $v_{1f} = v_{1i}\frac{(1-(\cos\theta_2)^2)}{\cos\theta_1} = v_{1i}\frac{(\sin\theta_2)^2}{\cos\theta_1}$ facendo il quadrato e moltiplicando per $\frac{1}{2}m_1$: $E_{1f} = \frac{1}{2}m_1{v_{1i}}^2\frac{(\sin\theta_2)^4}{(\cos\theta_1)^2} = E_{1i}\frac{(\sin\theta_2)^4}{(\cos\theta_1)^2}$ ma dalla prima relazione $E_{1i}(\sin\theta_2)^2 = E_{1i}\frac{(\sin\theta_2)^4}{(\cos\theta_1)^2} \to 1 = \frac{(\sin\theta_2)^2}{(\cos\theta_1)^2} \to (\cos\theta_1)^2 = (\sin\theta_2)^2 \to$
$E_{1f} = E_{1i}(\cos\theta_1)^2$.

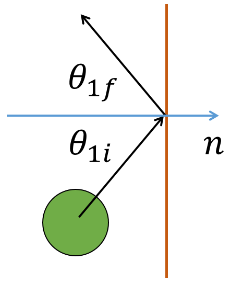
Ma $E_{1i} = E_{1f} + E_{2f} = E_{1i}((\cos\theta_1)^2 + (\cos\theta_2)^2)$ e quindi $(\cos\theta_1)^2 + (\cos\theta_2)^2 = 1$ verificata se $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$, ovvero se le masse dei corpi sono uguali, gli angoli di deflessione sono tra loro complementari.

Caso particolare: se la massa di $m_1 \ll m_2 \cong M$ cioè m_1 trascurabile ($\frac{m_1}{M} \to 0$). L'energia del corpo 1 sarà $E_{1f} \cong E_{1i}(1 - \frac{4m_1}{M}(\cos\theta_2)^2)$ ma $1 - \frac{4m_1}{M}(\cos\theta_2)^2 \cong 1$ e quindi $E_{1f} \cong E_{1i}$, quella del corpo 2
$E_{2f} = E_{1i}\frac{4m_1 m_2}{M^2}(\cos\theta_2)^2 \cong E_{1i}\frac{4m_1}{M}(\cos\theta_2)^2 \to 0$ e quindi

$$v_{2f} = 2\frac{m_1}{M}v_{1i}\cos\theta_2 \rightarrow 0$$

In tal caso il corpo 1 rimbalza sul corpo 2 che acquista un'energia praticamente nulla (e perciò rimane praticamente in quiete) ed il corpo 1 conserva la sua energia (il modulo della velocità non cambia dopo l'urto).

Questo può spiegare l'urto elastico di una palla da un muro liscio la cui massa è molto maggiore di quella della palla (massa del muro $m_2 \rightarrow \infty$) che implica CM in quiete.



La forza sulla palla è solo normale da cui si conserva la componente y parallela al muro $m_1 v_{1f}\sin\theta_{1f} = m_1 v_{1i}\sin\theta_{1i}$ (angoli definiti rispetto alla normale n al muro) ma dal risultato precedente il modulo della velocità non cambia (muro sempre fermo e urto elastico) quindi $\sin\theta_{1f} = \sin\theta_{1i} \rightarrow \theta_{1f} = \theta_{1i}$ **urto speculare**.

5) Urti e sistemi di riferimento

Trattando gli urti si possono utilizzare due sistemi di riferimento:

- Sistema del laboratorio: in genere un corpo si muove e urta un secondo corpo fermo. Il primo corpo è il proiettile e il secondo è il bersaglio. Il sistema del laboratorio è quello in cui il bersaglio è inizialmente in quiete ed è un sistema inerziale.
- Sistema del CM: è il sistema che si muove alla velocità costante $\vec{V}$ del CM rispetto al sistema del laboratorio ed è perciò un sistema inerziale.

Per passare dal primo al secondo sistema si utilizzano le trasformazioni di Galileo, la notazione nel sistema del CM conterrà i primi:

$$\vec{v}'_{1i} = \vec{v}_{1i} - \vec{V} = \vec{v}_{1i} - \frac{m_1\vec{v}_{1i}}{M} = \frac{(m_1+m_2)\vec{v}_{1i} - m_1\vec{v}_{1i}}{M} = \frac{m_2\vec{v}_{1i}}{M}$$

$$\vec{v}'_{2i} = \vec{0} - \vec{V} = -\frac{m_1\vec{v}_{1i}}{M}$$

Le quantità di moto prima dell'urto nel sistema del CM sono

$$\vec{p}'_{1i} = m_1\vec{v}'_{1i} = \frac{m_1 m_2\vec{v}_{1i}}{M}$$

$$\vec{p}'_{2i} = m_2\vec{v}'_{2i} = -\frac{m_1 m_2\vec{v}_{1i}}{M}$$

Ovvero sono vettori opposti $\vec{p}'_{2i} = -\vec{p}'_{1i}$ e la quantità di moto totale $\vec{P}' = \vec{0}$.

Dopo l'urto, la quantità di moto è conservata e quindi $\vec{p}'_{1f} + \vec{p}'_{2f} = \vec{0}$ perciò anche i vettori finali dei singoli corpi sono opposti $\vec{p}'_{2f} = -\vec{p}'_{2i}$.

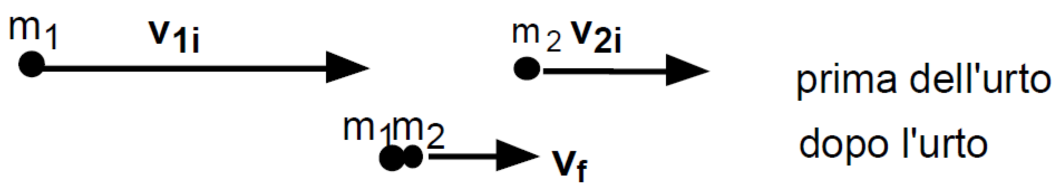
Nel sistema del CM, l'urto viene visto come 2 corpi che si avvicinano da parti opposte, interagiscono e si riallontanano da parti opposte.

Nel sistema del CM, i due corpi possono urtare e fermarsi in quiete dove avviene l'urto annullando completamente l'energia cinetica $K' = \frac{1}{2}m_1 {v_{1i}}'^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_{2i}}'^2$: questo corrisponde alla massima energia che può essere dissipata. Lo stesso processo visto nel sistema del laboratorio, corrisponde proprio agli urti totalmente anelastici in cui i corpi si trovano uniti dopo l'urto e procedono con la stessa velocità, quella del CM che non si può annullare.

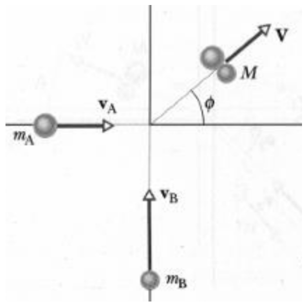
6) Urti totalmente anelastici

In questo caso l'unica legge di conservazione è quella di conservazione della quantità di moto però il fatto che i due corpi siano a contatto dopo l'urto e quindi abbiano la velocità del CM $\vec{V}$ permettere di risolvere il problema.

Infatti dalle condizioni iniziali in una dimensione abbiamo $V = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$



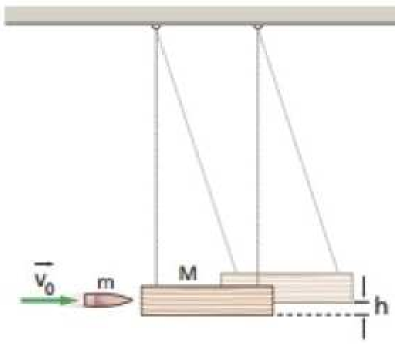
In più dimensioni, $\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2}$ e proiettando sulle componenti, ad esempio in 2 dimensioni, $V_x = \frac{m_1 v_{1xi} + m_2 v_{2xi}}{m_1 + m_2}$ e $V_y = \frac{m_1 v_{1yi} + m_2 v_{2yi}}{m_1 + m_2}$



Esempio: prima della comparsa di sistemi elettronici di misura, la velocità dei proiettili veniva misurata col pendolo balistico.

Il proiettile veniva sparato verso un blocco di legno in cui si conficcava.

Il blocco di legno è sospeso a formare un pendolo e a seguito dell'urto con il proiettile acquista una velocità che lo porta a muoversi e le corde lo costringono a sollevarsi ed inizia ad oscillare. L'altezza massima h che raggiunge il blocco dipende dalla velocità impressa dopo l'urto che rappresenta un tipico esempio di urto totalmente anelastico. Conoscendo questa velocità V è possibile ricavare la velocità del proiettile.



Sia v_0 la velocità iniziale del proiettile in orizzontale, mentre inizialmente il blocco è in quiete, sia inoltre m_p la massa del proiettile e m_b la massa del blocco.

La quantità di moto inziale del sistema ha solo componente orizzontale $P_i = m_p v_0$ e poiché durante l'urto non agiscono forze esterne impulsive in orizzontale essa si conserva. La quantità di moto finale è $P_f = (m_p + m_b)V = P_i$ da cui $V = \frac{m_p v_0}{m_p + m_b}$.

Terminato l'urto, il sistema blocco+proiettile non si è ancora spostato ma è animato dalla velocità V, definendo per l'energia potenziale la quota di riferimento all'altezza del CM del sistema in questo istante, l'energia cinetica $E_i = \frac{1}{2}(m_p + m_b)V^2$ si trasforma in energia potenziale e il sistema si fermerà alla quota h, ovvero $E_f = (m_p + m_b)gh$. Trascurando l'attrito viscoso con l'aria e gli eventuali attriti delle funi, l'energia si conserva $E_f = E_i$ ovvero $(m_p + m_b)gh =$

$\frac{1}{2}(m_p + m_b)V^2$ da cui $V = \sqrt{\frac{(m_p+m_b)gh}{\frac{1}{2}(m_p+m_b)}} = \sqrt{2gh} = \frac{m_p v_0}{m_p+m_b} \rightarrow$ la velocità del proiettile è perciò $v_0 = \frac{m_p+m_b}{m_p}\sqrt{2gh}$.