V PARTE: Gravitazione e leggi di Keplero

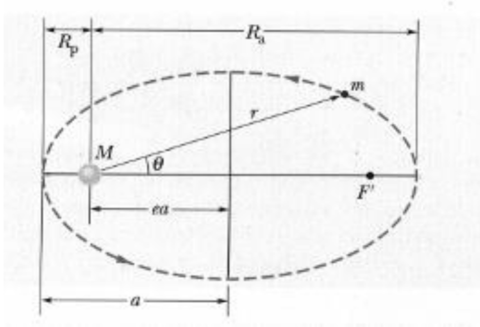
Il moto dei pianeti nel sistema solare è stato per secoli un problema meccanico di non facile soluzione con implicazioni anche filosofiche (ad esempio la Terra posta al centro dell'Universo). Un astronomo danese, Tycho Brahe (1546-1601), fece osservazioni molto accurate delle posizioni dei pianeti e queste osservazioni furono analizzate da un suo assistente, il tedesco Johannes Kepler (1571-1630) che scoprì empiricamente le omonime leggi che regolano il movimento dei pianeti.

Nel 1665 da queste leggi empiriche Isaac Newton (1642-1727) utilizzando le sue leggi del moto ricavò la legge di gravitazione universale unificando l'interpretazione dei fenomeni di caduta dei corpi verso il centro della Terra con il moto dei pianeti nel Sistema Solare.

Nel 1915, A. Einstein (1879-1955) elaborò la teoria della relatività generale, che generalizza la teoria di Newton.

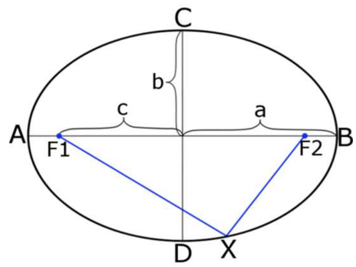
Analizzeremo le leggi di Keplero utilizzando le nostre conoscenze di dinamica del punto e come applicazione del momento angolare.

1) Leggi di Keplero

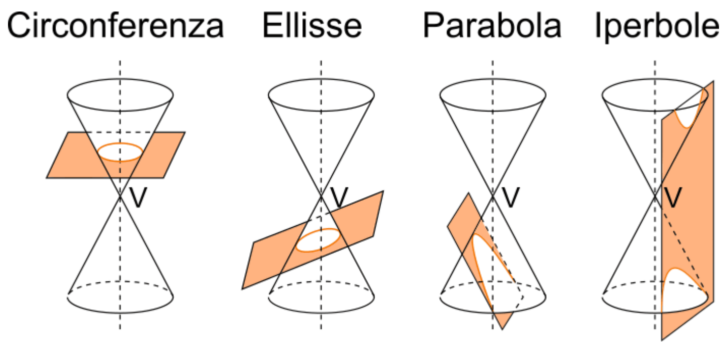


I) L'orbita descritta da ogni pianeta nel proprio moto di rivoluzione è un'ellisse di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

Un'ellisse è anche il luogo geometrico dei punti del piano per i quali la somma delle distanze da due punti fissi detti **fuochi** rimane costante.

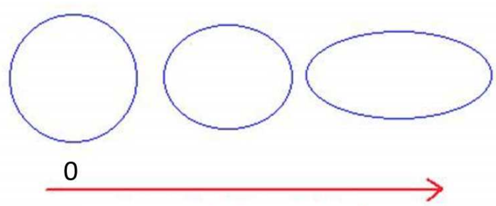


Nell'ellisse sono importanti i due assi di simmetria: l'asse maggiore (dimensione $2a$ della figura) che contiene i fuochi e l'asse minore (di dimensione $2b$). Questa curva piana fa parte delle sezioni coniche (intersezione tra il cono a due falde e un piano) mostrate in figura.



Se i due fuochi coincidono l'ellisse diventa una circonferenza (di raggio $r = a = b$), un caso particolare di ellisse.

Le varie ellissi sono identificate dal parametro di eccentricità $e = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$: nel caso della circonferenza l'eccentricità è $e = 0$, inoltre la distanza del fuoco dal centro è $c = ea$.

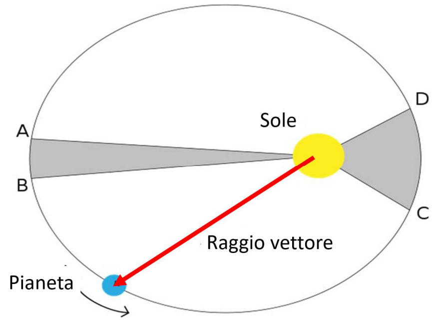


Le eccentricità delle orbite dei pianeti: al presente per l'orbita della Terra $e = 0{,}0167$ ma,

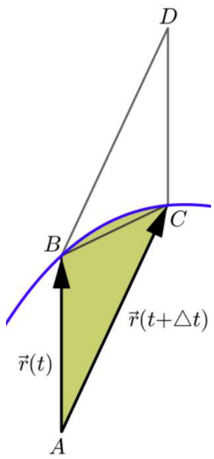
nel tempo, questa varia lentamente, passando da quasi 0 a circa 0,05 a causa dell'attrazione gravitazionale con gli altri pianeti;
Mercurio 0,2056; Venere 0,0068; Marte 0,0934; Giove 0,0483; Saturno 0,0560; Urano 0,0461; Nettuno 0,0097; Plutone 0,2488 (anche se questo non è più un pianeta).
Come si vede l'eccentricità è contenuta e le orbite sono quasi circolari.

Il calcolo dell'orbita è piuttosto complesso e non verrà dato nei dettagli ma assumeremo che l'orbita è piana e circa circolare dai risultati successivi.

II) Durante il movimento del pianeta, il raggio che unisce il centro del Pianeta al centro del Sole (raggio vettore) descrive aree uguali in tempi uguali.



Le parti tratteggiate della figura hanno la stessa area quindi gli archi ellittici AB e CD vengono percorsi nello stesso tempo: la velocità del pianeta è maggiore quando il pianeta è più vicino al Sole.



Si definisce velocità areolare la quantità vettoriale avente modulo pari alla derivata rispetto al tempo dell'area A spazzata dal vettore posizione (raggio vettore) $\vec{r}$
$\dot{A} = \frac{dA}{dt}$, con unità m^2/s,
direzione perpendicolare al piano dell'orbita e verso dato dalla regola della mano destra.
Se prendiamo una piccola regione dell'orbita si vede che l'area colorata tra due raggi vettori a tempi differenti, $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+\Delta t)$, è circa metà del parallelogramma ABCD la cui area è data da $|\vec{r}(t) \times \vec{r}(t+\Delta t)|$ quindi approssimativamente $A = \frac{1}{2}|\vec{r}(t) \times \vec{r}(t+\Delta t)|$ e dal punto di vista vettoriale $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r}(t) \times \vec{r}(t+\Delta t)$.
Consideriamo $\vec{r}(t+\Delta t) \cong \vec{r}(t) + \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\Delta t = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t$ dove $\vec{v}(t)$ è la velocità del pianeta al tempo t.
Chiaramente se $\Delta t \to 0$ la corda BC approssima sempre meglio la curva BC ed anche l'area viene approssimata sempre meglio (diviene esatta); anche la relazione scritta per $\vec{r}(t+\Delta t)$ diviene esatta $\rightarrow \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} \cong \frac{1}{2}\frac{\vec{r}(t)\times(\vec{r}(t)+\vec{v}(t)\Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{\vec{r}(t)\times\vec{r}(t)+\vec{r}(t)\times\vec{v}(t)\Delta t}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{\vec{r}(t)\times\vec{v}(t)\Delta t}{\Delta t} = \frac{1}{2}\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)$ relazione che diviene esatta per $\Delta t \to 0$, la velocità areolare è perciò $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)$.
Moltiplichiamo per la massa m del pianeta: $m\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r}(t) \times \left(m\vec{v}(t)\right) = \frac{1}{2}\vec{r}(t) \times \vec{p}(t)$
Con $\vec{p}(t)$ la quantità di moto del pianeta. Dalla definizione di momento angolare $\vec{\ell} = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t)$ con polo centrato sul Sole

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{\ell}}{2\,m}$$

La velocità areolare costante implica la costanza del momento angolare del pianeta. Essendo un vettore perpendicolare alla traiettoria, la sua costanza implica che la traiettoria (ovvero l'orbita del pianeta) deve avvenire in un piano avente per normale proprio il momento angolare.

L'equazione che fornisce l'evoluzione del momento angolare è $\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{\tau}$ con il momento della risultante delle forze. Trascurando la presenza di altri pianeti, l'unica forza che agisce sul pianeta è quella gravitazionale $\vec{F}_G$ lungo la congiungente Sole-pianeta (cioè lungo il raggio vettore) quindi $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_G = \vec{0}$ perché $\vec{r}$ e $\vec{F}_G$ sono (anti-)paralleli e quindi $\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{0}$. La conservazione del momento angolare di un pianeta è perciò dovuta al fatto che la forza gravitazionale agisce lungo la congiungente Sole-pianeta ovvero $\vec{F}_G = -F_G\hat{r}$.
Forze che agiscono lungo la congiungente partendo dal "centro della forza" (il Sole che occupa uno dei fuochi) sono dette forze centrali: tutte le forze centrali hanno la proprietà di conservare il momento angolare se si prende il polo nel "centro della forza".
Per le forze centrali vale la seconda legge di Keplero.
Nei punti corrispondenti all'intersezione con l'asse maggiore, punto più vicino al fuoco dove sta il Sole perielio $r_p = a - ea = a(1-e)$ e quello più distante afelio $r_a = a + ea = a(1+e)$, la velocità è perpendicolare al raggio vettore e quindi il modulo della velocità areolare vale $\dot{A} = \frac{1}{2}rv$ e dalla costanza nei vari punti $\rightarrow r_p v_p = r_a v_a$ che fornisce la relazione di proporzionalità inversa nei due punti considerati: il pianeta ha velocità maggiore quando è più vicino al Sole.

III) Il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo della sua distanza media dal Sole.

Si osserva infatti che il rapporto tra il quadrato del periodo di rivoluzione T_R (per la Terra T_R è un anno) e il cubo del semiasse maggiore dell'orbita a, ovvero $\frac{{T_R}^2}{a^3} = k = cost$, è lo stesso per tutti i pianeti.
Partiamo come fece Newton da questa legge e consideriamo per semplicità una orbita circolare $r = a$.

Definiamo un sistema di assi radiale e tangenziale alla traiettoria e proiettiamo la legge di Newton $\vec{F}_G = m\vec{a}$:
Per la costanza della distanza e la conservazione del momento angolare non c'è accelerazione tangenziale (moto circolare uniforme) e quindi consideriamo la parte radiale
rad: $-F_G = -m\,a_c = -m\frac{v^2}{r}$ ma la velocità costante è uguale alla velocità media data dalla lunghezza della traiettoria (circonferenza) diviso il tempo (periodo di rivoluzione)

$v = \frac{2\pi r}{T_R}$ e quindi $F_G = m\frac{v^2}{r} = m\frac{4\pi^2 r^2}{r{T_R}^2} = m\frac{4\pi^2 r}{{T_R}^2}$ ma inserendo la terza legge di Keplero ${T_R}^2 = ka^3 = kr^3$

$$F_G = m\frac{4\pi^2 r}{{T_R}^2} = m\frac{4\pi^2 r}{kr^3} = m\frac{4\pi^2}{kr^2}$$

La forza gravitazionale ha un andamento proporzionale all'inverso del quadrato della distanza.

Inoltre il valore $\frac{4\pi^2}{k}$ è costante per tutti i pianeti e quindi deve essere legato a qualche proprietà S del centro di forza, il Sole, quindi possiamo scrivere, introducendo una costante di proporzionalità G che assorbe anche il $4\pi^2$

$$F_G = G\frac{mS}{r^2}$$

Abbiamo introdotto due quantità G ed S, per capire il loro significato utilizziamo il terzo principio: ora è il pianeta il centro di forza che attira il Sole e quindi scrivendo la sua proprietà come P e definendo la massa del Sole come M si deve avere

$$F_G = G\frac{MP}{r^2}$$

Da cui risulta chiaro che la proprietà del centro di forza è la sua massa e quindi $F_G = G\frac{mM}{r^2}$ o in forma vettoriale utilizzando il fatto che è una forza centrale attrattiva

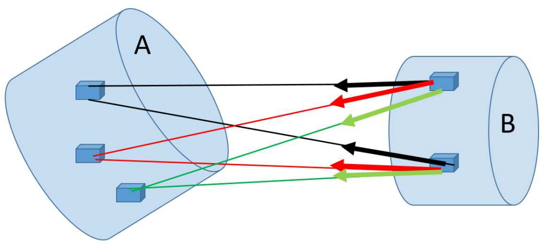
$$\vec{F}_G = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$$

2) Corpi puntiformi e a simmetria sferica

La legge di gravitazione universale si applica a corpi di dimensione ragguardevole ma a distanze così grandi che possono essere pensati come puntiformi.

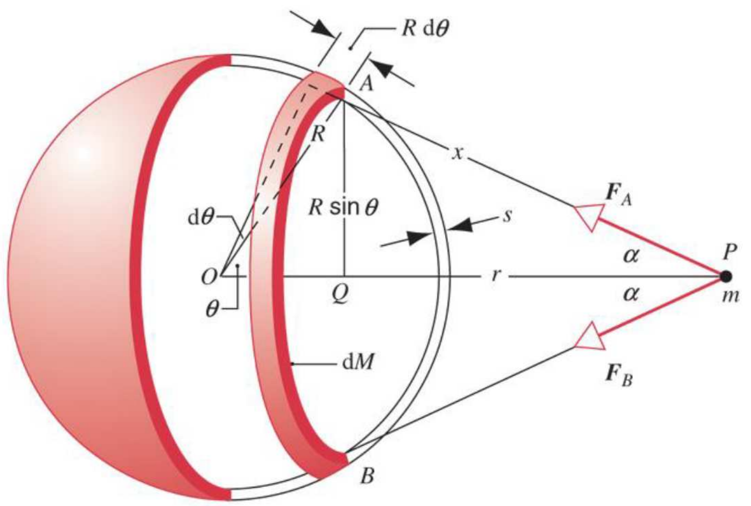
Abbiamo visto che la forza peso nasce da $\vec{F}_G = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$ se la distanza rimane circa costante al valore del raggio della Terra, però per questa distanza la Terra non è approssimabile come puntiforme.

Questo problema dovrebbe essere affrontato suddividendo la Terra in parti piccole da considerarle puntiformi e in generale 2 corpi che interagiscono gravitazionalmente dovrebbero essere suddivisi in parti piccole e si dovrebbero sommare le interazioni per trovare la risultante.



Newton formulò il teorema del guscio sferico (o semplicemente teorema del guscio) che consente di semplificare lo studio della gravitazione in presenza di corpi con simmetria sferica. Esso si compone di due parti:

a) un guscio sferico di massa M, avente densità uniforme, esercita su una particella esterna una forza gravitazionale pari a quella di una particella puntiforme di massa M posta nel suo centro;
b) la forza gravitazionale esercitata da un guscio sferico avente densità uniforme su una particella posta al suo interno è nulla.



Per dimostrare a) si parte da un guscio di materia di raggio R e spessore infinitesimo e lo si divide in anelli di raggio $R_A = R \sin\theta$ e spessore $ds = Rd\theta$ come in figura.
Il guscio complessivo ha massa M e area $A = 4\pi R^2$ mentre la massa dM dell'anello è proporzionale al rapporto fra le aree dell'anello ($A_A = 2\pi R_A(ds)$) e del guscio ovvero $dM = \frac{A_A}{A}M = \frac{2\pi R_A(ds)}{4\pi R^2}M = \frac{2\pi R\sin\theta(Rd\theta)}{4\pi R^2}M = \frac{1}{2}M\sin\theta\, d\theta$ e l'anello, poiché ogni sua parte si trova alla stessa distanza x dalla massa m, fornisce un contributo in modulo alla forza pari a $dF = G\frac{m\,dM}{x^2}\cos\alpha$, il coseno è dovuto al fatto che i contributi di due parti diametralmente opposte forniscono i vettori $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ le cui componenti verticali sono opposte e quindi si sommano solo le componenti orizzontali pari a $F_A\cos\alpha$.

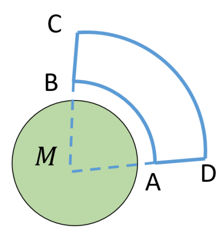
La forza complessiva del guscio è $F = \int dF$. Senza entrare nei dettagli del calcolo (si veda ad esempio un libro di testo o https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_guscio_sferico) il risultato è $F = G\frac{mM}{r^2}$, con r la distanza della massa dal centro del guscio.
Questo risultato prova che per un guscio a simmetria sferica attira una massa puntiforme esterna come se tutta la sua massa fosse concentrata in un punto materiale al suo centro.

Anche la seconda parte del teorema può essere dimostrata e quindi se la massa m è esterna ad una sfera (piena ed omogenea) di raggio R questa può essere suddivisa in gusci e per ciascuno si può applicare il teorema → la sfera agisce sulla massa come se tutta la sua massa fosse concentrata nel suo centro.
Nel caso la massa m fosse interna alla sfera ad una distanza $d < R$, la parte di materia che attira la massa è solo quella contenuta fino ad un raggio $r = d$, quella per $r > d$ non contribuisce.

Un risultato analogo verrà dimostrato in Elettromagnetismo, il teorema di Gauss, partendo dalla sorgente elementare del campo elettrico, ovvero la carica elettrica.

3) Energia potenziale gravitazionale

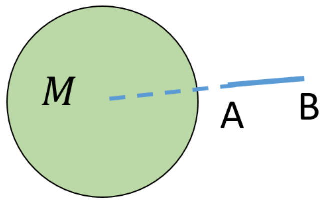
Abbiamo già incontrato l'energia potenziale della forza peso ed accennato a quella più generale che qui dimostreremo.



Iniziamo con la verifica di conservatività della forza di gravitazione universale generata da un corpo sferico.
Per la forza peso avevamo utilizzato un rettangolo che viene generalizzato nel settore ABCD come linea chiusa su cui calcolare il lavoro. Il lavoro si spezza sulle

4 curve: due radiali BC e DA e due archi di circonferenza AB e CD: $L = \oint \vec{F}_G \bullet d\vec{s} = \int_A^B \vec{F}_G \bullet d\vec{s} + \int_B^C \vec{F}_G \bullet d\vec{s} + \int_C^D \vec{F}_G \bullet d\vec{s} + \int_D^A \vec{F}_G \bullet d\vec{s} = 0 + \int_B^C \vec{F}_G \bullet d\vec{s} + 0 + \int_D^A \vec{F}_G \bullet d\vec{s}$ infatti sui tratti curvi la forza è in direzione radiale mentre lo spostamento è tangente all'arco $\vec{F}_G \bullet d\vec{s} = 0$.
Sui tratti radiali $\int_B^C \vec{F}_G \bullet d\vec{s} = \int_B^C F_G ds \ \cos 180° = -\int_B^C F_G ds$ mentre $\int_D^A \vec{F}_G \bullet d\vec{s} = \int_D^A F_G ds \ \cos 0° = +\int_D^A F_G ds$

E poiché $r_A = r_B$ e $r_C = r_D$, i lavori sui tratti radiali sono opposti e quindi il lavoro sulla curva chiusa e nullo.
Questo vale per tutti i percorsi chiusi simili a questo. Questo non esaurisce tutte le possibili curve ma una curva generica chiusa può essere approssimata sempre con tratti radiali e con archi.

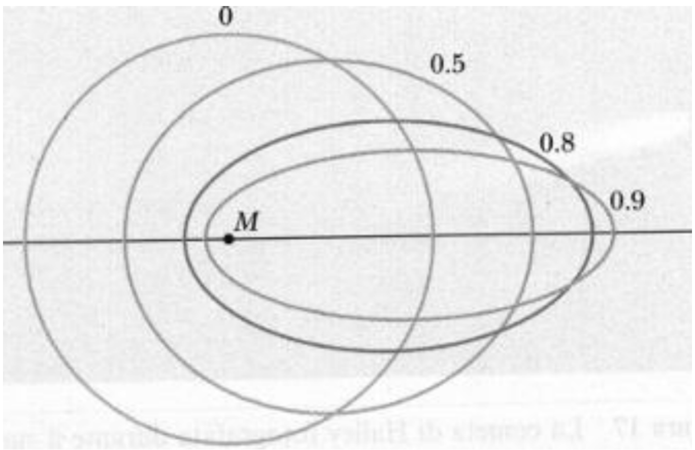


Calcoliamo esplicitamente il lavoro tra 2 punti lungo una direzione radiale tra i punti A e B $L_{AB} = \int_A^B \vec{F}_G \bullet d\vec{s} = \int_A^B -G\frac{mM}{r^2}\hat{r} \bullet d\vec{r} = -GMm\int_A^B \frac{1}{r^2}dr == -GMm\left(-\frac{1}{r}|_{r_A}^{r_B}\right) = GMm(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A})$,
l'energia potenziale è $U_B - U_A = -L_{AB} = -GMm(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A})$
solitamente si sceglie come punto di riferimento A un punto a distanza infinità dove la forza ha modulo nullo e $U_A = 0$ (risultato anche supportato dalla forma funzionale che dipende da $1/r$)

$$U(r) = -\int_\infty^r -G\frac{mM}{r^2}\hat{r} \bullet d\vec{r} = -G\frac{mM}{r}$$

Nella dispensa B2 sull'energia abbiamo visto che il gradiente cambiato di segno di $U(r)$ fornisce correttamente la forza $\vec{F}_G$.

Per un pianeta su un'orbita circolare in moto circolare uniforme l'energia è $E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}$ ma dalla legge di Newton abbiamo visto prima che $-G\frac{mM}{r^2} = -mv^2/r$ ovvero $mv^2 = G\frac{mM}{r^2}$ da cui $E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{mM}{r}$ l'energia del pianeta è negativa perché si trova in uno stato legato, il pianeta non può abbandonare il sistema solare.



Nel caso di orbite ellittiche al posto del raggio si dimostra che vi è il semiasse maggiore a.

In figura sono mostrate delle orbite con lo stesso semiasse maggiore ma diversa eccentricità indicata dal numero vicino all'orbita.

Aumentando l'energia ed avvicinandoci allo zero, il pianeta si allontana sempre di più dal Sole.

Se l'energia diviene nulla, $E = 0$,la soluzione del problema dinamico cambia e la traiettoria non è più chiusa ma diviene aperta e diventa una parabola. Il corpo con energia nulla può arrivare fino a distanza infinita dal centro di forza arrivandoci con velocità nulla (ed energia cinetica nulla).
Se l'energia diventa positiva, $E > 0$, la traiettoria cambia ancora e diviene un'iperbole. Il corpo raggiunge distanza infinita con velocità diversa da zero.

Le traiettorie in presenza di interazione gravitazionale sono una delle sezioni coniche, la particolare forma dipende dall'energia del sistema.

- Velocità di fuga: Un corpo sulla Terra richiede energia per abbandonarla essendo il sistema corpo-Terra un sistema legato e ci possiamo chiedere la velocità necessaria per lasciare la Terra (velocità di fuga).
  Se il corpo si trova sulla superficie terrestre a distanza R_T (raggio della Terra) dal centro, l'energia potenziale è $-G\frac{mM_T}{R_T}$ con M_T la massa della Terra.
  L'energia potenziale sommata all'energia cinetica fornisce l'energia del corpo $E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R_T}$. Per abbandonare la Terra, questa energia deve essere $E \geq 0$, ovvero il corpo deve arrivare all'infinto con una velocità almeno nulla.
  La minima velocità (velocità di fuga) è quindi data da $\frac{1}{2}m{v_F}^2 - G\frac{mM_T}{R_T} = 0 \rightarrow v_F = \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}}$.
  La velocità di fuga non dipende dalla massa del corpo ma solo della Terra e vale circa $1.12 \cdot 10^4 \frac{m}{s} = 11.2\ km/s$.

  Se si considerano gli altri pianeti basta sostituire la loro massa ed il loro raggio per ottenere la velocità di fuga. Ad esempio la velocità di fuga da Marte vale $v_F = 5.0 \cdot 10^3\ m/s$.

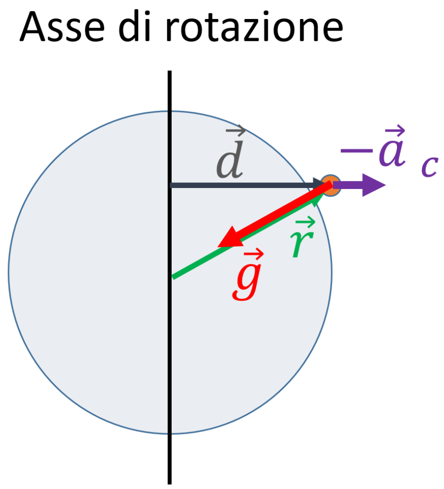
  Osservazione: la velocità di fuga ha implicazioni sulla composizione dell'atmosfera di un pianeta. Infatti le molecole/atomi di un gas ad una certa temperatura possiedono un velocità dovuta all'agitazione termica, se per una particolare specie chimica questa velocità è superiore alla velocità di fuga di quel pianeta, nel corso del tempo l'atmosfera si impoverirà di questa specie che ha la possibilità di abbandonare il pianeta.
  Nel caso della Terra, la sua massa è sufficientemente grande per trattenere molecole di ossigeno ed azoto. Invece non è sufficiente per trattenere idrogeno ed elio ed il ritmo attuale di perdita è di tre kg di idrogeno e 50 grammi di elio al secondo.

Sulla Luna, la gravità è più debole di quella della Terra e l'atmosfera è praticamente inesistente (velocità di fuga 2.38 km/s).
Avevamo già trattato il caso della forza peso nel caso della Terra, sulla Luna il calcolo procede nello stesso modo (e questo procedimento vale anche per qualunque pianeta sostituendo massa e raggio del pianeta), perciò la forza peso che agisce su un corpo di massa m sulla superficie della

Luna è $\vec{P}_{Luna} = m\vec{g}_{Luna}$ e dal confronto con la forza gravitazionale $m\vec{g}_{Luna} = -G\frac{mM_{Luna}}{{R_{Luna}}^2}\hat{r}$ da cui l'accelerazione di gravità è $\vec{g}_{Luna} = -G\frac{M_{Luna}}{{R_{Luna}}^2}\hat{r}$ e quindi sempre diretta verso il centro della Luna. Il confronto con la Terra $G\frac{M_T}{{R_T}^2} \cong 9.81\ m/s^2$ mentre per la Luna $G\frac{M_{Luna}}{{R_{Luna}}^2} \cong 1.62\ m/s^2$, 6 volte inferiore (massa Luna $M_{Luna} = 7.34 \cdot 10^{22}\ kg$, raggio medio della Luna $R_{Luna} = 1.74 \cdot 10^3\ km$ mentre per la Terra la massa è $M_T = 5.97 \cdot 10^{24}\ kg$ e il raggio medio $R_T = 6.37 \cdot 10^3\ km$).

L'accelerazione di gravità è anche modificata dallo schiacciamento ai Poli che modificano la distanza col centro del pianeta e dalla rotazione del pianeta.

Questo secondo effetto è legato al fatto che nel sistema di riferimento non inerziale solidale con il pianeta, agisce la forza centrifuga che si somma a quella (reale) gravitazionale come mostrato in figura. L'accelerazione di gravità (vettore rosso) è diretta verso il centro del pianeta (verso opposto a quello del vettore posizione verde).D'altra parte il corpo di massa m sta eseguendo un moto circolare a causa della rotazione del pianeta e quindi possiede un'accelerazione centripeta $\vec{a}_c$, che nel sistema non inerziale ha verso opposto (centrifugo) come mostrato in figura di modulo $a_c = \omega^2 d$ con ω la velocità angolare di rotazione e d la distanza dall'asse di rotazione.



Ai poli (che sono in genere vicini all'asse di rotazione), $d = 0$ e l'accelerazione è dovuta solo alla parte gravitazionale. All'equatore del pianeta $d = R$ raggio del pianeta, l'accelerazione centrifuga ha valore massimo con verso opposto a $\vec{g}$.

Infine un'ultima variazione è dovuta al fatto che la distribuzione delle masse del pianeta non è uniforme e quindi la gravità è maggiore dove sono presenti parti con maggiore densità. Queste perturbazioni sull'andamento medio possono essere misurate e utilizzate per studiare, tra altre cose, lo spessore dei ghiacci polari o per trovare giacimenti petroliferi.

Osservazione: anche in assenza di perturbazioni dovute alla distrubuzione non uniforme, un filo a piombo sulla Terra, che fornisce la verticale locale, non punta esattamente verso il centro del pianeta a causa dell'accelerazione centrifuga.