VI PARTE: Sistemi

1) Sistemi di punti materiali

Finora abbiamo trattato la cinematica e poi la dinamica di un corpo in approssimazione di punto materiale, escludendo quindi la dinamica di corpi grandi relativamente alle dimensioni in cui si muove il corpo e non considerando possibili rotazioni del corpo.

Abbiamo già incontrato dei sistemi di più corpi (ad esempio due corpi collegati da una fune) e li abbiamo trattati considerando la dinamica di ciascun corpo a sé stante e introducendo dei vincoli cinematici. Un altro esempio è quello degli urti tra 2 corpi puntiformi in cui abbiamo iniziato a considerare il sistema dei due punti, ora vogliamo estenderlo a un numero di punti qualsiasi.

Iniziamo da sistemi di punti non vincolati tra loro.

a) Traslazioni

Per il corpo i-esimo possiamo scrivere la legge di Newton $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$.

La risultante delle forze è $\vec{F}_i = \sum_{l \neq i} \vec{F}_{li}$ con $\vec{F}_{li}$ la forza che rappresenta l'interazione tra un corpo l-esimo (diverso dal corpo i-esimo in esame perché un corpo non auto-interagisce con sé stesso) con il corpo i-esimo (la forza che l applica a i).

Dobbiamo scrivere una equazione su tutti i corpi di cui vogliamo analizzare il moto, il sistema di punti scelto.

Alcuni dei punti l interagenti faranno parte del sistema (useremo l'indice j) e altri non faranno parte del sistema (useremo l'indice k). È opportuno separare le forze in **forze interne**, ovvero che coinvolgono punti appartenenti al sistema $\vec{F}_{ji}$, e **forze esterne**, ovvero che coinvolgono corpi esterni al sistema che agiscono su un corpo del sistema $\vec{F}_{ki}$.

Se il sistema è formato da N punti, abbiamo quindi N equazioni vettoriali (3N equazioni sulle componenti) da risolvere:

$$\begin{gathered} \vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{F}_2 = m_2 \vec{a}_2 \\ \dots \\ \vec{F}_N = m_N \vec{a}_N \end{gathered}$$

Sommiamo le equazioni fra loro

$$\sum_i^N \vec{F}_i = \sum_i^N m_i \vec{a}_i$$

La risultante delle forze può essere separata nella somma delle forze interne e in quelle esterne (ext), per il terzo principio $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ e quindi la somma sulle forze interne $\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \vec{0}$ da cui

$\sum_i^N \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_{ki} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ji} = \sum \vec{F}_{ext}$.

Quindi per il sistema nel suo complesso sono sparite le forze interne e la risultante contiene solo le forze esterne $\sum \vec{F}_{ext}$.

A secondo membro abbiamo $\sum_i^N m_i\vec{a}_i$ che si può anche scrivere $\sum_i^N m_i\vec{a}_i = \sum_i^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i^N \frac{d(m_i\vec{v}_i)}{dt} = \sum_i^N (\vec{p}_i) = \frac{d}{dt}(\sum_i^N \vec{p}_i) = \frac{d}{dt}\vec{P}$ dove $\vec{p}_i$ sono le quantità di moto dei singoli punti i-esimi e definiamo la quantità di moto (totale) del sistema $\vec{P} = \sum_i^N \vec{p}_i$ da cui

- **Prima equazione cardinale dei sistemi** $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt}\vec{P}$.

Se la leggiamo come una relazione per un "punto materiale" che è tutto il sistema, la massa sarebbe quella complessiva $M = \sum_i^N m_i$ e quindi la velocità di questo punto $\vec{V} = \frac{\vec{P}}{M} = \frac{\sum_i^N \vec{p}_i}{M} = \frac{\sum_i^N m_i\vec{v}_i}{M}$.

Questa ultima relazione può essere ottenuta partendo dalle posizione dei punti del sistema $\vec{r}_i$ $\frac{\sum_i^N m_i\vec{r}_i}{M} = \vec{R}$ che definisce il vettore posizione del "punto materiale" che derivato fornisce la velocità $\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\sum_i^N m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum_i^N m_i\vec{v}_i}{M} = \vec{V}$.
A questo punto possiamo anche associare una accelerazione $\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\sum_i^N m_i\vec{a}_i}{M}$ da cui la prima equazione cardinale potrebbe essere riscritta come $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt}\vec{P} = M\vec{A}$.

Questo "punto materiale" che fornisce il comportamento del sistema nel suo complesso è il **centro di massa** (CM) la cui posizione è la media pesata sulle masse della posizione dei singoli punti $\vec{R} = \sum_i^N (\frac{m_i}{M})\vec{r}_i$.

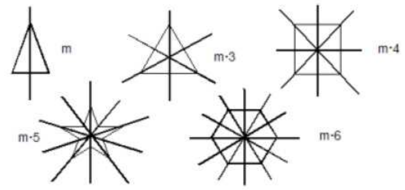
In questa descrizione complessiva si perde l'analisi del singolo punto e per sapere come si comporta occorre ritornare alla singola equazione i-esima.

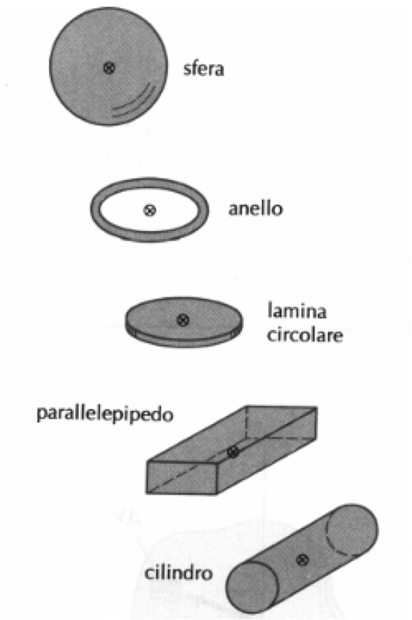
L'introduzione del CM mostra che quanto definito per il punto materiale non è stato inutile ma viene ereditato dal CM anche per un sistema di punti materiali.

Il centro di massa può anche essere chiamato baricentro anche se, come dice il nome, questo è il centro dove viene applicata la forza peso che per forze parallele (come è il caso della forza peso nei pressi della superficie terrestre e corpi di dimensione trascurabile rispetto alla Terra) coincide con il CM. Da questa osservazione, il CM sarà il punto in cui è applicata la forza peso di un corpo.

La definizione di CM come media pesata delle posizioni (con peso $\frac{m_i}{M}$) mostra che se un corpo ha massa molto più grande di quelle degli altri, il CM si trova vicino a questo corpo.
Ad esempio il Sole costituisce più del 99% della massa del sistema solare e il centro di massa del sistema solare cade nei pressi del Sole.

Inoltre se il sistema presenta delle simmetrie (ad esempio ruotando opportunamente il sistema attorno ad un asse il sistema ricopre sé stesso, oppure riflettendolo attraverso un piano si riottiene il sistema senza aver modificato nulla), il CM si troverà su questi elementi di simmetria: punti, assi o piani di simmetria.





È da tener presente che il corpo deve essere **omogeneo** (la densità, quantità definita successivamente in questa dispensa, deve essere costante) altrimenti la simmetria geometrica non si applica per trovare la posizione del CM.

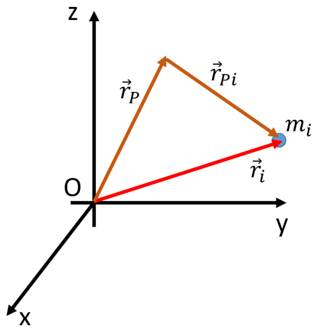
In figura sono mostrati alcuni esempi di corpi tridimensionali continui omogenei e il CM è indicato dal punto con croce.
L'osservazione che per corpi omogenei il CM è sugli elementi di simmetria del corpo permette di conoscere la posizione del CM senza effettuare nessun calcolo.
Si osservi che per l'anello il CM è esterno ai punti che formano il corpo continuo.

Esempio: calcolare il CM di tre punti di massa $m_1 = 1\ kg, m_2 = 2\ kg, m_3 = 1\ kg$ che si trovano nelle posizioni $\vec{r}_1 = (1,0,2)m$, $\vec{r}_2 = (0,1,2)m$ e $\vec{r}_3 = (2,-1,0)m$.
Occorre valutare $\vec{R} = \sum_i^N (\frac{m_i}{M})\vec{r}_i$, la massa totale è $M = m_1 + m_2 + m_3 = 4\ kg$ e spezziamo il calcolo nelle 3 componenti:
x: $X = \frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{M} = \frac{1+0+2}{4}m = 0.75\ m$ (2 cifre significative)
y: $Y = \frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{M} = \frac{0+2-1}{4}m = 0.25\ m$
z: $Z = \frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3}{M} = \frac{2+4+0}{4}m = 1.5\ m$ da cui $\vec{R} = (0.75, 0.25, 1.5)\ m$.

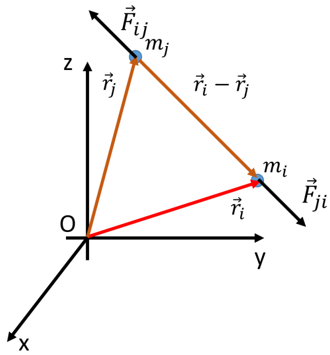
b) Rotazioni

Per un singolo punto materiale i-esimo avevamo anche introdotto il momento angolare $\vec{\ell}_i = \vec{r}_{Pi} \times \vec{p}_i$ che, per un polo fisso, forniva un'equazione equivalente alla legge di Newton $\frac{d\vec{\ell}_i}{dt} = \vec{r}_{Pi} \times \sum \vec{F}_i$.
Come abbiamo fatto sopra possiamo introdurre il momento angolare complessivo del sistema (da non confondere con il lavoro che è un concetto scalare, in caso di ambiguità il lavoro sarà indicato da $\mathcal{L}$) $\vec{L} = \sum_i^N \vec{\ell}_i$.

Se effettuiamo la derivazione $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i^N \frac{d\vec{\ell}_i}{dt} = \sum_i^N \left(\frac{d\vec{r}_{pi}}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_{Pi} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right) = \sum_i^N \left(\frac{d\vec{r}_{pi}}{dt} \times \vec{p}_i\right) + \sum_i^N \left(\vec{r}_{Pi} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right)$.



Riscriviamo $\vec{r}_{Pi} = \vec{r}_i - \vec{r}_p$ con $\vec{r}_P$ la posizione del polo, derivando $\frac{d\vec{r}_{pi}}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_P$, moltiplicando vettorialmente per la quantità di moto $\vec{v}_i \times \vec{p}_i = \vec{0}$ perché vettori paralleli da cui $\sum_i^N \left(\frac{d\vec{r}_{pi}}{dt} \times \vec{p}_i\right) = -\sum_i^N (\vec{v}_P \times \vec{p}_i) = -\vec{v}_P \times \sum_i^N (\vec{p}_i) = -\vec{v}_P \times \vec{P}$.



Utilizzando la legge di Newton $\sum_i^N \left(\vec{r}_{Pi} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right) = \sum_i^N (\vec{r}_{Pi} \times \vec{F}_i)$.
Osserviamo che per le forze interne che compaiono a coppie per il terzo principio e agiscono sulla congiungente tra i due punti in interazione $\vec{r}_{Pi} \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_{Pj} \times \vec{F}_{ij} = \vec{r}_{Pi} \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_{Pj} \times (-\vec{F}_{ji}) = (\vec{r}_{Pi} - \vec{r}_{Pj}) \times \vec{F}_{ji} = \vec{0}$ perché il vettore $\vec{r}_{Pi} - \vec{r}_{Pj} = \vec{r}_i - \vec{r}_p - (\vec{r}_j - \vec{r}_p) = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ (posizione relativa di i rispetto a j) è parallelo alla forza $\vec{F}_{ji}$.

Utilizzando questi risultati $\frac{d\vec{L}}{dt} = -\vec{v}_P \times \vec{P} + \sum_i^N (\vec{r}_{Pi} \times \vec{F}_{ext})$ od anche, introducendo i momenti delle forze esterne $\vec{\tau}_{ext} = \vec{r}_{Pi} \times \vec{F}_{ext}$ da cui la risultante dei momenti delle forze esterne $\sum_i^N (\vec{r}_{Pi} \times \vec{F}_{ext}) = \sum \vec{\tau}_{ext}$ si può scrivere la

- **Seconda equazione cardinale dei sistemi** $\frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{v}_P \times \vec{P} = \sum \vec{\tau}_{ext}$

Prima osservazione: al contrario del caso di una singola particella, questa Seconda equazione cardinale fornisce una seconda equazione indipendente dalla Prima e quindi si hanno sei equazioni scalari nelle componenti x,y,z per ciascuna di esse.

Seconda osservazione: il polo è unico sia per il calcolo dei momenti angolari sia per il calcolo dei momenti delle forze. Inoltre, anche se nella Prima le forze esterne si potrebbero pensare applicate sempre al CM, la Seconda richiede la **conoscenza del punto di applicazione**.

Terza osservazione:

- scegliendo come polo un punto fisso $\vec{v}_P = \vec{0}$
- oppure se $\vec{v}_P$ è parallela alla velocità del CM $\vec{V}$
- oppure se per polo si assume il CM $\vec{v}_P = \vec{V} \rightarrow \vec{V} \times \vec{P} = \vec{V} \times M\vec{V} = \vec{0}$

$\rightarrow$ la **Seconda equazione si semplifica in** $\boldsymbol{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{ext}}$.

Nei nostri problemi assumeremo sempre come polo un punto fisso o il CM e quindi la Seconda equazione cardinale sarà scritta $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{ext}$.

2) Corpo rigido

Le due equazioni cardinali forniscono 6 equazioni e se il sistema è formato da 2 punti materiali (6 coordinate) queste permettono di trovare il moto dei 2 punti.
Tre punti sono descritti da 9 coordinate e le 2 equazioni cardinali non permettono di ricavare il moto dei singoli punti e bisogna tornare alla descrizione a singolo punto materiale.
È utile a questo punto introdurre il concetto di corpo rigido, ovvero un corpo in cui le distanze relative dei punti che lo compongono è invariabile per qualunque sollecitazione venga applicata, sono indeformabili. I corpi che ci circondano sono in certa misura indeformabili e quindi questa approssimazione riesce a descrivere il comportamento di una classe ampia di corpi, solo dovremo estendere la descrizione ai **corpi continui**.
Nel caso del corpo rigido, le due equazioni cardinali sono sufficienti a descriverne il moto perché un punto del corpo è sicuramente rappresentato dal CM il cui moto è descritto dalla Prima equazione, prendendo un secondo punto possiamo definire un vettore solidale al corpo che descrive le rotazioni descritte dalla Seconda equazione.

La rigidità permette di introdurre il concetto di **tensore d'inerzia** di cui vediamo brevemente la definizione.

Partiamo da $\vec{L} = \sum_i^N \vec{\ell}_i = \sum_i^N (\vec{r}_{Pi} \times \vec{p}_i) = \sum_i^N (\vec{r}_{Pi} \times m_i \vec{v}_i)$
Per semplicità supponiamo che il corpo ruoti attorno ad un asse fisso, ci sarà un vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ **comune a tutti i punti** lungo questo asse, scegliamo il polo su un punto di questo asse coincidente con l'origine degli assi, da cui la velocità $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_{Pi}$ e quindi $\sum_i^N (\vec{r}_{Pi} \times m_i \vec{v}_i) = \sum_i^N (\vec{r}_{Pi} \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_{Pi}))$.
Il termine $\vec{r}_{Pi} \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_{Pi})$ si può spezzare in due parti perché
$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_{Pi}$ è in una direzione perpendicolare a $\vec{\omega}$ e $\vec{r}_{Pi}$, moltiplicata per $\vec{r}_{Pi}$
il vettore risultante è in una direzione perpendicolare a $\vec{v}_i$ (e anche a $\vec{r}_{Pi}$) e quindi è nel piano formato da $\vec{\omega}$ e $\vec{r}_{Pi}$ e sarà una combinazione di questi vettori (infatti se chiamiamo i tre vettori coinvolti $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ il doppio prodotto gode della proprietà $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \bullet \vec{a})\vec{b} - (\vec{b} \bullet \vec{a})\vec{c}$ con frase mnemonica "cab meno bac" (vedere appendice))

$$\vec{r}_{Pi} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{Pi}) = (\vec{r}_{Pi} \bullet \vec{r}_{Pi})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \bullet \vec{r}_{Pi})\vec{r}_{Pi}$$

Consideriamo le componenti
X: $(x_{Pi}^2 + y_{Pi}^2 + z_{Pi}^2)\omega_x - (\omega_x x_{Pi} + \omega_y y_{Pi} + \omega_z z_{Pi})x_{Pi}$
Y: $(x_{Pi}^2 + y_{Pi}^2 + z_{Pi}^2)\omega_y - (\omega_x x_{Pi} + \omega_y y_{Pi} + \omega_z z_{Pi})y_{Pi}$
Z: $(x_{Pi}^2 + y_{Pi}^2 + z_{Pi}^2)\omega_z - (\omega_x x_{Pi} + \omega_y y_{Pi} + \omega_z z_{Pi})z_{Pi}$

Cerchiamo di fattorizzare la velocità angolare (unico parametro comune a tutti i punti)
X: $\boldsymbol{x_{Pi}^2 \omega_x} + y_{Pi}^2 \omega_x + z_{Pi}^2 \omega_x - \boldsymbol{\omega_x x_{Pi} x_{Pi}} - \omega_y y_{Pi} x_{Pi} - \omega_z z_{Pi} x_{Pi} = (y_{Pi}^2 + z_{Pi}^2)\omega_x - (x_{Pi} y_{Pi})\,\omega_y - (x_{Pi} z_{Pi})\omega_z$
Y: $x_{Pi}^2 \omega_y + \boldsymbol{y_{Pi}^2 \omega_y} + z_{Pi}^2 \omega_y - \omega_x x_{Pi} y_{Pi} - \boldsymbol{\omega_y y_{Pi} y_{Pi}} - \omega_z z_{Pi} y_{Pi} = -(x_{Pi} y_{Pi})\omega_x + (x_{Pi}^2 + z_{Pi}^2)\omega_y - (y_{Pi} z_{Pi})\omega_z$

Z: $x_{Pi}{}^2\omega_z + y_{Pi}{}^2\omega_z + \boldsymbol{z_{Pi}{}^2\omega_z} - \omega_x x_{Pi}z_{Pi} - \omega_y y_{Pi}z_{Pi} - \boldsymbol{\omega_z z_{Pi}z_{Pi}} = -(x_{Pi}z_{Pi})\omega_x - (y_{Pi}z_{Pi})\omega_y + (x_{Pi}{}^2 + y_{Pi})\omega_z$

Mettiamoli in tabella per rendere più evidente la struttura
$\begin{pmatrix} (y_{Pi}{}^2 + z_{Pi}{}^2)\omega_x - (x_{Pi}y_{Pi})\,\omega_y - (x_{Pi}z_{Pi})\omega_z \\ -(x_{Pi}y_{Pi})\omega_x + (x_{Pi}{}^2 + z_{Pi}{}^2)\omega_y - (y_{Pi}z_{Pi})\omega_z \\ -(x_{Pi}z_{Pi})\omega_x - (y_{Pi}z_{Pi})\omega_y + (x_{Pi}{}^2 + y_{Pi})\omega_z \end{pmatrix}$ questa può essere pensata come il prodotto

righe per colonne tra $\begin{pmatrix} (y_{Pi}{}^2 + z_{Pi}{}^2) & -(x_{Pi}y_{Pi}) & -(x_{Pi}z_{Pi}) \\ -(x_{Pi}y_{Pi}) & (x_{Pi}{}^2 + z_{Pi}{}^2) & -(y_{Pi}z_{Pi}) \\ -(x_{Pi}z_{Pi}) & -(y_{Pi}z_{Pi}) & (x_{Pi}{}^2 + y_{Pi}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$.

Moltiplichiamo per la massa del punto i-esimo e sommiamo su tutti i punti definendo il tensore di inerzia del corpo rigido
$\overleftrightarrow{I} = \begin{pmatrix} \sum_i^N m_i\,(y_{Pi}{}^2 + z_{Pi}{}^2) & -\sum_i^N m_i\,(x_{Pi}y_{Pi}) & -\sum_i^N m_i\,(x_{Pi}z_{Pi}) \\ -\sum_i^N m_i\,(x_{Pi}y_{Pi}) & \sum_i^N m_i\,(x_{Pi}{}^2 + z_{Pi}{}^2) & -\sum_i^N m_i\,(y_{Pi}z_{Pi}) \\ -\sum_i^N m_i\,(x_{Pi}z_{Pi}) & -\sum_i^N m_i\,(y_{Pi}z_{Pi}) & \sum_i^N m_i\,(x_{Pi}{}^2 + y_{Pi}{}^2) \end{pmatrix}$
quindi per un corpo rigido

$\vec{L} = \overleftrightarrow{I}\vec{\omega}$ questa relazione esprime **la relazione tra velocità angolare e momento angolare**.

Per semplificare la notazione utilizzeremo $\overleftrightarrow{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$

Osserviamo che, dai risultati visti nell'introduzione per la moltiplicazione tra una matrice e un vettore, **$\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ non sono in generale vettori paralleli**: mentre $\vec{\omega}$ è lungo l'asse di rotazione $\vec{L}$ potrebbe essere diretto in una direzione qualunque.

Osservazione: il fatto di essere paralleli avviene in casi particolari. In generale questa mancanza di parallelismo ha delle implicazioni: se $\vec{\omega}$ è costante (e quindi l'asse è fisso nel tempo) $\vec{L}$ è un vettore variabile nel tempo; se $\vec{L}$ è costante nel tempo perché non ci sono momenti delle forze esterni, $\vec{\omega}$ e quindi anche l'asse di rotazione sono variabili nel tempo.

La matrice che rappresenta il tensore del secondo ordine momento di inerzia gode della proprietà di essere simmetrica (quindi la matrice trasposta coincide con la matrice di partenza, ovvero scambiando indici $I_{ij} = I_{ji}$, quindi ad esempio $I_{xy} = I_{yx}$) e questo comporta la possibilità di diagonalizzarla ovvero trovare un sistema di assi di riferimento x',y',z' in cui il tensore è diagonale cioè con elementi solo nella diagonale principale $\overleftrightarrow{I} =$

$\begin{pmatrix} \sum_i^N m_i \left({y'_{Pi}}^2 + {z'_{Pi}}^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \sum_i^N m_i \left({x'_{Pi}}^2 + {z'_{Pi}}^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \sum_i^N m_i \left({x'_{Pi}}^2 + {y'_{Pi}}^2\right) \end{pmatrix}$, facendo ruotare il corpo lungo uno di tali assi $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ sono vettori paralleli.

Questi elementi fuori della diagonale principale (che forniscono le componenti di $\vec{L}$ fuori dell'asse di rotazione) sono i termini che determinano lo sbilanciamento dei corpi (ad esempio delle ruote delle auto che vanno bilanciate per evitare vibrazioni e usura dei cuscinetti). La trattazione completa sarà oggetto del corso di Fisica Matematica e nel presente corso si semplificherà la trattazione limitando il calcolo a corpi rigidi che ruotano attorno ad assi fissi (o che rimangano paralleli a sé stessi durante il moto).

In tal caso, scegliendo un asse di riferimento lungo l'asse di rotazione, supponiamo l'asse z, $\vec{\omega} = (0,0,\omega)$ da cui $\vec{L} = \overleftrightarrow{I}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xz}\omega_z \\ I_{yz}\omega_z \\ I_{zz}\omega_z \end{pmatrix}$

Se trascuriamo anche le componenti del momento angolare fuori dall'asse z abbiamo $L_z = I_{zz}\omega_z = \sum_i^N m_i \left({x_{Pi}}^2 + {y_{Pi}}^2\right)\omega_z$.

Possiamo semplificare ulteriormente la scrittura riferendoci a questo asse di rotazione per le componenti dei vettori $L = I\omega$ dove I è il **momento di inerzia** del corpo.

Il momento di inerzia (apparentemente una grandezza scalare, in realtà un elemento del tensore di inerzia) avrà un valore che dipenderà dalla direzione dell'asse di rotazione, dal punto in cui l'asse passa nel corpo e dalla distribuzione delle masse attorno a questo asse. Infatti ${x_{Pi}}^2 + {y_{Pi}}^2$ rappresenta la distanza del punto i-esimo dall'asse di rotazione ${r_i}^2 = {x_{Pi}}^2 + {y_{Pi}}^2$ perciò possiamo **definire il momento di inerzia** come

$$I = \sum_i^N m_i {r_i}^2$$

considerando il corpo come formato da punti materiali. Nel seguito vedremo come estendere la definizione ai corpi continui.

La Seconda equazione cardinale $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{ext}$ viene a questo punto proiettata sull'asse di rotazione z quindi $\frac{dL_z}{dt} = \sum \tau_{ext,z}$ ma $L_z = I\omega$ e poiché l'asse di rotazione è fisso (e quindi anche il momento di inerzia) si ha $\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$, la Seconda equazione perciò si semplifica in

$$\sum \tau_{ext,z} = I\alpha$$

Nel corso si tratteranno problemi in cui il corpo si muove in due dimensioni e quindi il CM (un punto materiale in cui si può pensare sia concentrata la massa del corpo) avrà un moto descritto negli assi di riferimento x,y; oltre a questi le rotazioni del corpo richiederanno anche l'asse z, che completa la terna destrorsa, terna su cui verrà proiettato sia il momento angolare e la sua derivata ($I\alpha$) e sia il momento delle forze ($\tau_{ext,z}$).

Questo fa **aggiungere altri passi a quanto già descritto per la risoluzione dei problemi:**
- aggiunta dell'**asse z** che completi la terna destrorsa, questo equivale a definire il verso di rotazione positivo (quello che incrementa l'angolo di rotazione del corpo)
- **definire un polo** in modo opportuno: infatti la scelta del polo può annullare un momento di una forza incognita (solitamente una reazione vincolare dovuta ad un perno che definisce l'asse di rotazione) e la scelta è o sull'asse di rotazione (in genere un punto fisso) oppure il CM.
- Scrittura della Seconda equazione cardinale proiettata lungo questo asse z: $\sum \tau_{ext,z} = I\alpha$
- Eventuale vincolo cinematico che lega la posizione $\vec{R}$ (nel piano x,y) del CM all'angolo di rotazione θ attorno all'asse considerando opportunamente i segni (quindi ad uno spostamento positivo potrebbe corrispondere anche una rotazione negativa). Derivando nel tempo si otterrà il legame tra $\vec{V}$ del CM e ω e con una seconda derivazione il legame tra $\vec{A}$ del CM (in particolare la componente tangenziale) e α.

3) Leggi di conservazione

Se le forze esterne hanno risultante nulla (sistema isolato) $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ si ha ovviamente che $\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{0}$ e la quantità di moto non cambia nel tempo (è costante) ed è quindi una quantità conservata: il valore alla fine di un certo fenomeno sarà uguale a quella all'inizio $\vec{P}_f = \vec{P}_i$.
Essendo la relazione vettoriale è possibile avere conservazione anche di una sola componente o di due componenti della quantità di moto del sistema: ad esempio $P_{fx} = P_{ix}$.

La conservazione del momento angolare richiede che **la risultante dei momenti delle forze esterne sia nulla** $\sum \vec{\tau}_{ext} = \vec{0}$, in tal caso il valore del momento angolare alla fine di un certo fenomeno sarà uguale a quella all'inizio $\vec{L}_f = \vec{L}_i$.
Anche in questo caso, essendo la relazione vettoriale è possibile avere conservazione anche di una sola componente o di due componenti del momento angolare del sistema: ad esempio $L_{fx} = L_{ix}$.

Un esempio è quello di un pattinatore che ha le braccia stese verso l'esterno e ruotando su sé stesso possiede una certa velocità angolare ω_i da cui un momento angolare lungo l'asse di rotazione $L_i = I_i\omega_i$. Avvicinando le braccia al corpo modifica il suo momento d'inerzia (che diminuisce poiché la distribuzione di masse è più vicina all'asse di rotazione $I_f < I_i$) e quindi $L_f = I_f\omega_f$. Trascurando l'attrito dei pattini col terreno (in ogni caso il punto di applicazione avrebbe una distanza piccola dall'asse di rotazione e quindi un momento della forza non elevato e, se il movimento della braccia è veloce, il momento della forza di attrito non ha tempo per modificare il momento angolare, un'applicazione dell'approssimazione impulsiva), $L_f = L_i \rightarrow I_f\omega_f = I_i\omega_i \rightarrow \omega_f = \frac{I_i\omega_i}{I_f} > \omega_i$.

4) Statica di un corpo rigido

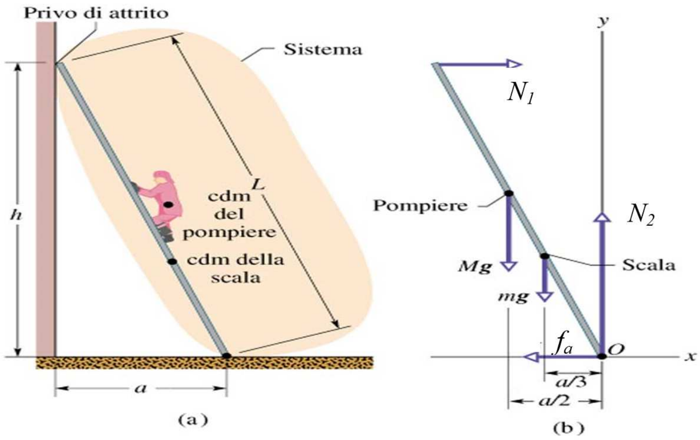
Consideriamo un corpo rigido che non si muova in nessun modo: nessuna traslazione ($\vec{V}$ del CM nulla), nessuna rotazione (velocità angolare $\vec{\omega}$ del corpo attorno ad un asse nulla). Se deriviamo queste quantità che sono costanti otteniamo $\vec{A} = \vec{0}$ e $\vec{\alpha} = \vec{0}$ che sostitute nelle equazioni cardinali diventano

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ condizione di equilibrio per le forze (→traslazione del CM a velocità costante, dobbiamo aggiungere che la velocità iniziale è nulla)

$\sum \vec{\tau}_{ext} = \vec{0}$ condizione di equilibrio per i momenti delle forze (→rotazione a velocità angolare costante, dobbiamo aggiungere che la velocità angolare iniziale è nulla)

Come già osservato queste equazioni sono tra loro indipendenti e forniscono 6 equazioni sulle componenti x,y,z, anche se, nei problemi che in genere affronteremo con asse di rotazione fisso, dovremo risolvere 3 equazioni, una per ogni asse della terna.

Esempio: Scala di massa m appoggiata ad un muro (privo di attrito) con un pompiere di massa M a metà di essa come in figura.



Il sistema da considerare è la scala. Nei punti di appoggio della scala si sviluppano le forze normali $\vec{N}_1$ ed $\vec{N}_2$ e in orizzontale anche presente la forza di attrito statico $\vec{f}_a$. Infine sono applicate alla scala la forza peso $m\vec{g}$ e la forza che il pompiere applica alla scala pari al peso del pompiere $M\vec{g}$. Scegliamo un sistema di riferimento come in figura, terna destrorsa richiede che l'asse z sia uscente dal foglio. Proiettiamo su questo sistema le condizioni di equilibrio

Prima equazione:

x: $N_1 - f_a = 0$

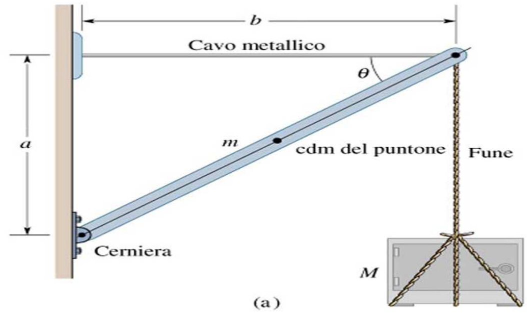
y: $N_2 - Mg - mg = 0$

Seconda equazione, scegliamo come polo il punto O, i momenti delle forze saranno

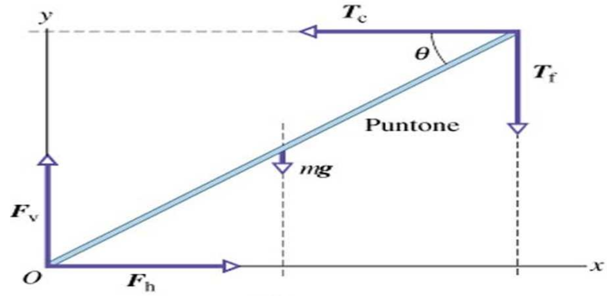
z: $\frac{a}{2}Mg + \frac{a}{3}mg - hN_1 = 0$

La forza di attrito rispetto ad O ha momento nullo, però compare nella prima equazione che dimostra la necessità della forza di attrito per le condizioni di equilibrio della scala altrimenti in orizzontale ciò non sarebbe possibile.

Esempio: condizioni di equilibrio di una trave m che sostiene una massa appesa M.

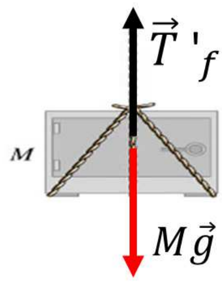


Il sistema da considerare è la trave che è incernierata ad un estremo (quello inferiore) e viene tenuta in posizione da un cavo metallico alla estremità superiore. La massa è sospesa tramite una fune attaccata all'estremità superiore.
Le forze agenti sulla trave sono perciò: nella cerniera la forza di reazione del vincolo che possiamo separare in un componente orizzontale $\vec{F}_h$ e in uno verticale $\vec{F}_v$, la forza peso $m\vec{g}$, la tensione del cavo metallico $\vec{T}_c$ in orizzontale e la tensione della fune che sostiene la massa $\vec{T}_f$. Scegliamo un sistema di riferimento come in figura, terna destrorsa richiede che l'asse z sia uscente dal foglio. Proiettiamo su questo sistema le condizioni di equilibrio



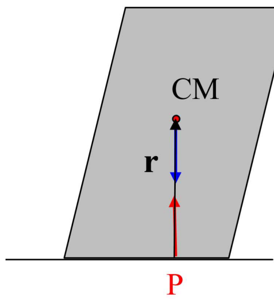
Prima equazione:
x: $F_h - T_c = 0$
y: $F_v - mg - T_f = 0$

Seconda equazione, scegliamo come polo il punto O in modo che la reazione vincolare abbia momento nullo:
z: a$T_c - \frac{b}{2}mg - bT_f = 0$

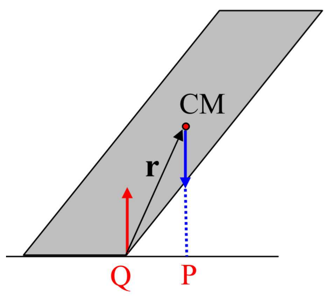


ovviamente dovremo considerare anche un'equazione per la massa sospesa utilizzando la stessa terna, anche questo corpo deve essere in equilibrio:
y: $T'_f - Mg = 0 \rightarrow\ T'_f = Mg$, poiché alle estremità della fune supposta ideale viene trasmessa la stessa tensione in modulo: $T_f = T'_f = Mg$.

Concludiamo con le condizioni di equilibrio per un corpo di massa M appoggiato su un piano orizzontale.



a) se la proiezione verticale del peso del corpo è all'interno della base di appoggio del corpo (punto P) il piano orizzontale reagisce con una forza normale (vettore rosso) uguale alla forza peso (vettore blu) ed applicata in P. Preso P come polo, non ci momenti netti e in tal caso il corpo è in equilibrio.
b) se la proiezione verticale del peso del corpo è all'esterno della base di appoggio del corpo (punto P) il piano orizzontale reagisce con una forza normale (vettore rosso) applicata nel punto di contatto Q che risulta più vicino a P.
In effetti se il corpo iniziasse a ruotare in senso orario, il punto Q sarebbe il punto attorno a cui ruoterebbe e, anzi, diventerebbe l'unico punto di appoggio. Prendendo come polo il punto Q, si osserva che il momento della forza peso è diverso da zero → il corpo non è in equilibrio e inizierà a ruotare proprio in senso orario.



Appendice:

Spezziamo il calcolo di $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ in due parti

$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}(b_y c_z - b_z c_y) - \hat{\jmath}(b_x c_z - b_z c_x) + \hat{k}(b_x c_y - b_y c_x)$ e poi

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_y c_z - b_z c_y & b_z c_x - b_x c_z & b_x c_y - b_y c_x \end{vmatrix}$$
$$= \hat{\imath}\left(a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z)\right)$$
$$- \hat{\jmath}\left(a_x(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_y c_z - b_z c_y)\right)$$
$$+ \hat{k}\left(a_x(b_z c_x - b_x c_z) - a_y(b_y c_z - b_z c_y)\right) =$$

Da cui cercando di riunire componenti lungo lo stesso asse per isolare prodotti scalari

X:$\left(a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z)\right) = (a_y c_y)b_x - (b_y a_y)c_x + (a_z c_z)b_x - (a_z b_z)c_x$

Y:$\left(a_z(b_y c_z - b_z c_y) - a_x(b_x c_y - b_y c_x)\right) = (a_z c_z)b_y - (a_z b_z)c_y + (a_x c_x)b_y - (a_x b_x)c_y$

Z:$\left(a_x(b_z c_x - b_x c_z) - a_y(b_y c_z - b_z c_y)\right) = (a_x c_x)b_z - (a_x b_x)c_z + (a_y c_y)b_z - (a_y b_y)c_z$

X:$(a_y c_y + a_z c_z)b_x - (b_y a_y + a_z b_z)c_x$ per completare manca $a_x c_x b_x$ nella prima parentesi e $-a_x b_x c_x$ nella seconda che si elidono a vicenda da cui aggiungendoli $(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)b_x - (a_x b_x + b_y a_y + a_z b_z)c_x = (\vec{a} \bullet \vec{c})b_x - (\vec{a} \bullet \vec{b})c_x$

Y:$(a_x c_x + a_z c_z)b_y - (b_x a_x + a_z b_z)c_y$ per completare manca $a_y c_y b_y$ nella prima parentesi e $-a_y b_y c_y$ nella seconda che si elidono a vicenda da cui aggiungendoli $(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)b_y - (a_x b_x + b_y a_y + a_z b_z)c_y = (\vec{a} \bullet \vec{c})b_y - (\vec{a} \bullet \vec{b})c_y$

Z:$(a_x c_x + a_y c_y)b_z - (b_x a_x + a_y b_y)c_z$ per completare manca $a_z c_z b_z$ nella prima parentesi e $-a_z b_z c_z$ nella seconda che si elidono a vicenda da cui aggiungendoli $(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)b_z - (a_x b_x + b_y a_y + a_z b_z)c_z = (\vec{a} \bullet \vec{c})b_z - (\vec{a} \bullet \vec{b})c_z$

$\rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{c}$ ovvero è una combinazione lineare dei vettori $\vec{b}$ e $\vec{c}$ e il risultato è quindi nel piano di questi vettori.

Poiché il prodotto scalare è commutativo $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \bullet \vec{a})\vec{b} - (\vec{b} \bullet \vec{a})\vec{c}$, in tale forma considerando che il mondo anglosassone utilizza frasi per ricordare, si legge “cab meno bac”, dove è chiaro che i vettori che si combinano sono $\vec{b}$ e $\vec{c}$.