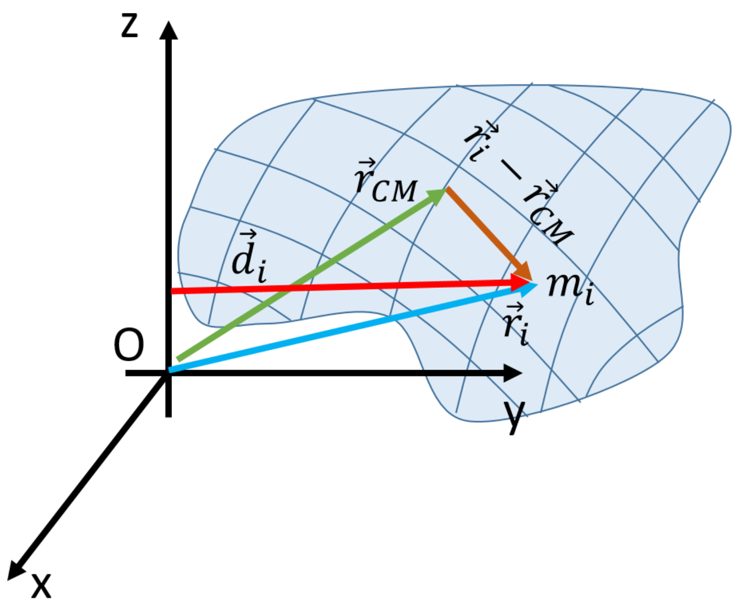
VII PARTE: Corpi continui

1) Estensione a corpi continui

Sia il CM sia il momento di inerzia sono definiti partendo da punti materiale ma i corpi che ci circondano sono continui. Vediamo ora come estendere tali definizioni.

Nel caso il corpo sia continuo (a livello macroscopico, essendo qualunque corpo formato da atomi se lo guardiamo dal punto di vista microscopico) le definizioni vanno modificate con un metodo che nel corso verrà utilizzato in modo generale: passare dal discreto al continuo. Questo metodo verrà utilizzato anche in Elettromagnetismo.



Un punto materiale ha una posizione ben definita essendo un punto geometrico dotato di massa. Un corpo esteso non ha una posizione ben definita, occorre perciò suddividerlo in parti con posizione meglio definita a cui attribuire anche una massa: questi pezzetti rappresenteranno il punto materiale. In figura è mostrato un esempio con una suddivisione grossolana.
Rendendo più fitto il reticolato di suddivisione (aumentando quindi il numero di parti N) nella sommatoria le masse m_i tendono a diventare sempre più piccole (infinitesime) e la loro posizione $\vec{r}_{Pi}$ meglio definita.

Se consideriamo il momento di inerzia rispetto all'asse z (asse di rotazione) quello che conta non è la posizione ma la distanza dall'asse (vettore rosso) quindi la lunghezza della perpendicolare tra il centro della regione i-esima e l'asse di rotazione, al limite per suddivisioni fittissime e $N \to \infty$ la sommatoria tende ad un integrale

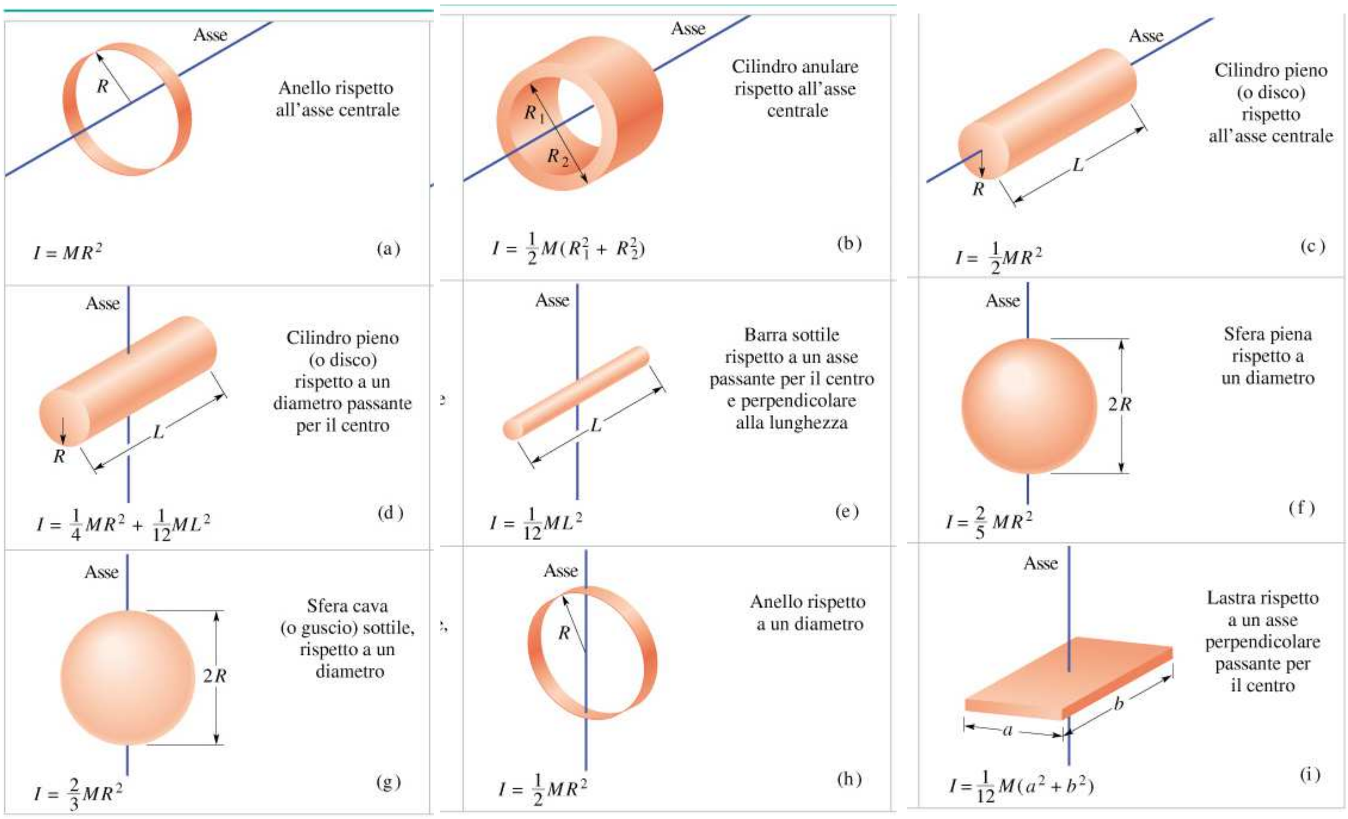
$$I = \int r^2 dm$$

Solitamente si trovano tabelle con il valore del momento di inerzia per corpi di forma particolare ed assi che passano per il CM (assi baricentrali).

Osservazione: il procedimento matematico porta effettivamente a masse infinitesime ma fisicamente non si può scendere su dimensioni certamente più piccole di un atomo altrimenti non si ha più materia, anzi meglio arrestarsi prima, in modo che ci siano abbastanza atomi da comportarsi mediamente come il materiale macroscopico e il differenziale è proprio detto differenziale macroscopico per questo motivo.

G. Bracco

Un esempio di una tabella che riporta esplicitamente il disegno della giacitura dell'asse di rotazione è mostrata sotto.



Per il calcolo esplicito dell'integrale occorre in genere esprimere il differenziale della massa utilizzando la densità.

2) Densità

Nel caso più semplice di **corpo omogeneo** di massa M volume V_{ol} (usiamo questa notazione per non confondere con la velocità del CM V), la densità è definita come $\rho = \frac{M}{V_{ol}}$ con unita kg/m^3.
Nel caso più generale di corpo non omogeneo, quindi con densità variabile, occorre usare il procedimento di suddivisione definito prima giungendo all'infinitesimo macroscopico dV_{ol}.
Prendiamo una parte del corpo di volume ΔV_{ol} e massa ΔM, la densità media è $\rho_m = \frac{\Delta M}{\Delta V_{ol}}$.
Facendo il limite $\lim_{\Delta V_{ol} \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V_{ol}} = \rho$ ovvero densità punto per punto (punto macroscopico) del corpo.
La massa si calcola sui vari elementi infinitesimi che compongono il corpo continuo (per ciascuno di essi $dm = \rho\, dV_{ol}$) come $M = \int dm = \int \rho\, dV_{ol}$, l'integrale è esteso su tutto il volume del corpo.
Se omogeneo $\int \rho\, dV_{ol} = \rho \int dV_{ol} = \rho\, V_{ol} = M$.

Questo procedimento di limite per trovare la densità e dalla densità, integrando sul volume, la massa è generale per tutti i corpi continui. Sfortunatamente l'integrale è un integrale di volume e quindi non calcolabile con le tecniche di integrazione definite nel corso (infatti dovrebbe essere indicato da $\iiint \rho dV_{ol}$ perché il volume infinitesimo (parallelepipedo rettangolo infinitesimo) in coordinate cartesiane è $dV_{ol} = dx \cdot dy \cdot dx$ quindi occorre integrare su 3 coordinate, integrale triplo).

D'altra parte esistono corpi "filiformi" in cui una sola dimensione ℓ è apprezzabile (per esempio una matita ha raggio limitato rispetto alla lunghezza ℓ) e quindi si può definire una **densità lineare** $\lambda = \lim_{\Delta\ell \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta \ell}$ (e nel caso omogeneo $\lambda = \frac{M}{\ell}$) con unità kg/m.
La massa in tal caso è $M = \int \lambda \, d\ell$, integrale unidimensionale che corrisponde a quelli trattati nel corso.

Osservazione: ovviamente il corpo filiforme ha densità volumetrica ρ. Nel caso omogeneo il volume dell'oggetto che supponiamo si sezione con area A sarà $V_{ol} = A\ell$ perciò la densità di volume $\rho = \frac{M}{V_{ol}} = \frac{M}{A\ell} \rightarrow \lambda = \frac{M}{\ell} = \rho A$

È opportuno anche introdurre i corpi in cui 2 dimensioni sono apprezzabili mentre la terza è trascurabile (un foglio di carta). In tal caso si introduce una **densità superficiale** σ definita da $\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta A}$ dove A è l'area del corpo, unità kg/m^2.
La massa in tal caso è $M = \int \sigma \, dA$, un integrale bidimensionale ($\iint \sigma \, dxdy$) che richiede conoscenze oltre a quelle del presente corso.

Osservazione: come fatto prima, il corpo ha densità volumetrica ρ. Nel caso omogeneo il volume dell'oggetto che supponiamo di spessore s sarà $V_{ol} = As$ perciò la densità di volume $\rho = \frac{M}{V_{ol}} = \frac{M}{As}$ $\rightarrow \sigma = \frac{M}{A} = \rho s$.

D'altra parte per corpi con simmetria circolare (quindi dischi con densità superficiale che dipende dalla distanza dal centro del disco $\sigma(\vec{r}) = \sigma(r)$ (cioè sempre dalla combinazione di $\sqrt{x^2 + y^2} = r$) e non dal vettore posizione, ovvero $\sigma(\vec{r}) = \sigma(x, y)$ (cioè singolarmente dalle coordinate)) è possibile scrivere un integrale unidimensionale che può essere risolto con quanto imparato durante il corso.
Vediamo un esempio con ρ polinomiale in r: un disco (non omogeneo) di raggio $R = 10 \ cm$ ha densità superficiale $\sigma = (\beta r^2 + 10) \ kg/m^2$ con $\beta = 0.2 \frac{kg}{m^4}$ e r la distanza dal centro. Calcolare la massa del disco.
Soluzione: Convertiamo $= 10 \ cm = 0.10 \ m$.
Il calcolo richiede oltre a σ la conoscenza di dA, essendo il sistema a simmetria circolare poniamo l'origine del sistema di riferimento nel centro del disco, la densità è costante su ogni circonferenza concentrica del disco.
Consideriamo una corona circolare di raggio r e $r + \Delta r$ e valutiamo l'area $\Delta A = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = \pi r^2 + 2\pi r \, \Delta r + \pi(\Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r \, \Delta r + \pi(\Delta r)^2$, trascurando il termine al secondo ordine in Δr perché faremo un limite, $\Delta A = 2\pi r \, \Delta r$ e quindi nel limite $dA = 2\pi r \, dr$, un risultato

valido in generale. Infatti se calcoliamo l'area del disco $\int_0^R dA = \int_0^R 2\pi r\, dr = 2\pi \int_0^R r\, dr = 2\pi \frac{r^2}{2}|_0{}^R = \pi R^2$, area del disco.

Questa corona è una circonferenza con spessore dr e, poiché infinitesimo, la variazione della densità tra r e $r + dr$ è trascurabile (variazione ad ordini superiori al primo) per cui la massa della corona infinitesima è $dm = \sigma\, dA \rightarrow$ sommando su tutti gli anelli di spessore infinitesimo con diverso raggio $M = \int_0^R \sigma\, 2\pi r\, dr = \int_0^R (\beta r^2 + 10) 2\pi r\, dr = \int_0^R 2\pi\beta r^3\, dr + \int_0^R 20\pi r\, dr = 2\pi\beta \int_0^R r^3\, dr + 20\pi \int_0^R r\, dr = 2\pi\beta \frac{r^4}{4}|_0{}^R + 20\pi \frac{r^2}{2}|_0{}^R = 2\pi\beta \frac{R^4}{4} + 20\pi \frac{R^2}{2} = \frac{\pi}{2}\beta R^4 + 10\pi R^2 = 0.3142\ kg \ \approx 0.31\ kg$ (2 cifre significative).

Anche nel caso tridimensionale, se il corpo ha simmetria sferica (ovvero le quantità dipendono dalla distanza da un centro (e ponendo l'origine degli assi nel centro la distanza è $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) e non dalla posizione vettoriale $\vec{r} = (x, y, z)$) possiamo ridurci ad un integrale unidimensionale.

Consideriamo infatti la corona sferica di raggi r e $r + \Delta r$ che ha volume $\Delta V_{ol} = \frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2\Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3 - r^3) = \frac{4}{3}\pi(3r^2\Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3)$ poiché faremo un limite teniamo solo il termine al primo ordine $\Delta V_{ol} = \frac{4}{3}\pi 3r^2\Delta r = 4\pi r^2\Delta r$ e facendo il limite per $\Delta r \rightarrow 0$ si ottiene $dV_{ol} = 4\pi r^2\, dr$, guscio sferico di raggio r e spessore infinitesimo dr.

La densità deve essere funzione solo di r e quindi l'integrale ad esempio della massa si riduce a $M = \int \rho(r)\, 4\pi r^2\, dr$.

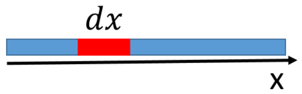
Verifichiamo che quanto fatto sia consistente calcolando il volume della sfera di raggio R: $V_{ol} = \int dV_{ol} = \int_0^R 4\pi r^2\, dr = 4\pi \frac{r^3}{3}|^R{}_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 - 0 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

3) Calcolo del CM e del momento di inerzia

La massa totale del corpo vale $M = \sum_i^N m_i$ e il CM definito sui punti materiali del sistema è definito come $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i^N m_i\vec{r}_i$, passando al continuo $M = \int dm = \int \rho\, dV$ e $\vec{R} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, \rho dV$ che si può calcolare componente per componente $R_x = \frac{1}{M}\int x\, \rho dV$, $R_y = \frac{1}{M}\int y\, \rho dV$ e $R_z = \frac{1}{M}\int z\, \rho dV$.

Per corpi dotati di simmetria, il CM giace sugli elementi di simmetria del corpo.

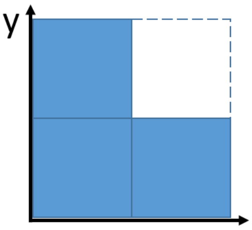
Gli elementi di simmetria sono: assi di simmetria, piani di simmetria, punti di simmetria. Questo permette di individuare il CM senza effettuare calcoli almeno per alcune coordinate.



Per un'asta omogenea di lunghezza ℓ disposta lungo l'asse con un estremo nell'origine $MX = \int_0^\ell x\, dm = \int_0^\ell x\lambda\, d\ell = \int_0^\ell x\lambda\, dx = \frac{1}{2}\lambda x^2|_0^\ell = \frac{1}{2}\lambda\ell^2$ ma la massa è $M = \lambda\ell$, $X = \frac{MX}{M} = \frac{1}{M}(\frac{1}{2}\lambda\ell^2) = \frac{1}{2\lambda\ell}\lambda\ell\ell = \frac{1}{2}\ell$ ovvero il CM è nel punto medio come ci aspettavamo per simmetria.

Ad esempio considerando un semicerchio omogeneo come in figura con il diametro orizzontale, il CM giace sul raggio verticale, ovviamente occorre ancora calcolarne l'altezza e questo verrà fatto dopo.

Metodo additivo: Per un corpo composto da corpi continui di massa M_i (le parti tra loro disgiunte) di cui si conosce la posizione del loro CM (CMi), il CM complessivo è $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i^N M_i\vec{r}_{CMi}$ con $M = \sum_i^N M_i$, quindi del tutto simile alla formula per corpi puntiformi.
Infatti, considerando la definizione di CM $M\vec{R} = \int \vec{r}\rho\, dV_{ol}$ separiamo l'integrale totale come somma degli integrali sulle varie parti p_1, p_2,… ovvero $M\vec{R} = \int \vec{r}\rho\, dV_{ol} = \int_{p_1,} \vec{r}\rho\, dV_{ol} + \int_{p_2} \vec{r}\rho\, dV_{ol} + \cdots = M_1\vec{R}_1 + M_2\vec{R}_2 + \cdots \rightarrow \vec{R} = \frac{M_1\vec{R}_1+M_2\vec{R}_2+\cdots}{M}$
Esempio del metodo additivo: trovare la posizione del CM di un quadrato omogeneo la lato a a cui è stato tolto un quadratino di lato $a/2$ come in figura.



Soluzione: Il sistema può essere pensato come formato da 3 quadrati di lato $a/2$ in modo da costituire la forma a "L". I tre quadrati hanno stessa massa $M_1 = M_2 = M_3 = M$ i centri di massa (al centro di ciascuno per simmetria) sono in posizione $\vec{R}_1 = (a/4, a/4)$, $\vec{R}_2 = (3a/4, a/4)$ e $\vec{R}_3 = (a/4, 3a/4)$, inoltre la forma ad "L" (omogenea) mostra di possedere una simmetria lungo la retta $y = x$ (riflessione o rotazione di 180°) e quindi è sufficiente calcolare una sola delle componenti, l'altra ha lo stesso valore:
x: $(M_1 + M_2 + M_3)X = M_1X_1 + M_2X_2 + M_3X_3 = M_1\frac{a}{4} + M_2\frac{3a}{4} + M_3\frac{a}{4} = Ma\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}Ma$
$\rightarrow X = \frac{5}{12}a$ e dalla simmetria $Y = \frac{5}{12}a$.

Metodo sottrattivo: La separazione, dovuta al fatto che una sommatoria (o un integrale) globale su tutto il corpo può essere calcolata su parti del tutto, permette anche di trovare il CM come differenza fra parti (disgiunte) di cui si conosce la posizione del CM: dal tutto si può togliere una parte (o più parti) di cui si conosce il CM.
Esempi del metodo sottrattivo:

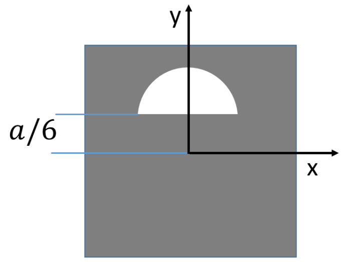
a) trovare la posizione del CM di un quadrato omogeneo di lato a a cui è stato tolto un quadratino di lato $a/2$ come nella figura precedente.

Soluzione: Il sistema può essere pensato come un quadrato di lato a a cui è stato sottratto il quadratino di lato $a/2$ in modo da costituire la forma a "L". La massa del quadrato sia M_t e quella del quadratino (un quarto del totale) sia $M_s = \frac{1}{4}M_t$ ovvero la massa della "L" è $M = \frac{3}{4}M_t$. I centri di massa (al centro di ciascuno per simmetria) sono in posizione $\vec{R}_t = (a/2, a/2)$ e $\vec{R}_s = (3a/4, 3a/4)$, inoltre la forma ad "L" (omogenea) mostra di possedere una simmetria lungo la retta $y = x$ (riflessione o rotazione di 180°) e quindi è sufficiente calcolare una sola delle componenti di $\vec{R}$, l'altra ha lo stesso valore:

x: $M_t X_t = MX + M_s X_s \rightarrow MX = M_t X_t - M_s X_s = M_t \frac{a}{2} - \frac{1}{4} M_t \frac{3}{4} a = M_t a \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{16}\right) = \frac{5}{16} M_t a \rightarrow$ $X = \frac{\frac{5}{16} M_t a}{M} = \frac{\frac{5}{16} M_t a}{\frac{3}{4} M_t} = \frac{5}{12} a$ e dalla simmetria $Y = \frac{5}{12} a$.

b) Nel prossimo esempio troveremo la posizione del CM per un semicerchio e utilizzeremo ora il risultato.

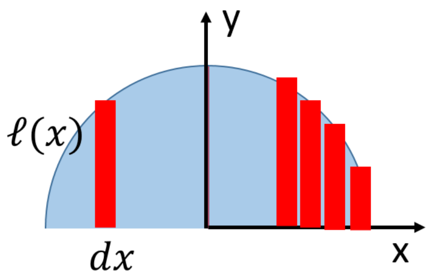
Trovare il CM per un quadrato di materiale omogeneo di lato a con il centro nell'origine in cui è stato rimosso un semicerchio di raggio $R = a/4$ come in figura il cui diametro (parallelo al lato orizzontale del quadrato) si trova a $y = a/6$ come in figura.



Soluzione: Il sistema può essere pensato come un quadrato di lato a a cui è stato sottratto il semicerchio di raggio R. La massa del quadrato sia M_t e quella del semicerchio sia $M_s = \frac{\pi R^2}{2a^2} M_t$ (essendo omogeneo $\sigma = \frac{M_t}{A} = \frac{M_t}{a^2}$ da cui $M_s = \sigma \frac{\pi R^2}{2}$) ed il sistema ha massa $M = M_t - M_s$. Il centro di massa del quadrato è in posizione $\vec{R}_t = (0,0)$ mentre $\vec{R}_s = (0, \frac{4}{3\pi} R + a/6)$, inoltre la forma mostra di possedere una simmetria lungo la retta $x = 0$ (riflessione o rotazione di 180° attorno all'asse y) e quindi il CM ha coordinata $X = 0$ (anche il calcolo diretto fornisce immediatamente $MX = M_t X_s - M_s X_s = 0$) ed è sufficiente calcolare Y:

y: $MY = M_t Y_t - M_s Y_s \rightarrow Y = \frac{-M_s Y_s}{M_t - M_s} = -\frac{\frac{\pi R^2}{2a^2} M_t \left(\frac{4}{3\pi} R + \frac{a}{6}\right)}{M_t - \frac{\pi R^2}{2a^2} M_t} = -\frac{\frac{\pi R^2}{2a^2} \left(\frac{4}{3\pi} R + \frac{a}{6}\right)}{1 - \frac{\pi R^2}{2a^2}} = -\frac{\pi R^2 (\frac{4}{3\pi} R + a/6)}{2a^2 - \pi R^2}$ e quindi $Y = -\frac{8R^3 + \pi R^2 a}{12 a^2 - 6\pi R^2}$. Il valore è negativo perché togliendo massa dalla parte positiva il CM si sposta sotto l'asse x.

Questi metodi possono essere utilizzati anche se la sommatoria sulle parti diventa un integrale,



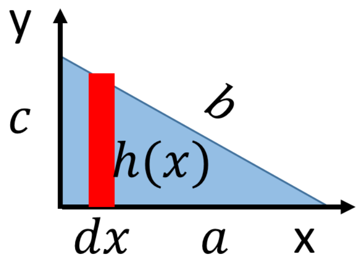
cioè si separa il corpo in elementi infinitesimi di cui si conosce la posizione del CM.

Esempio: in figura è mostrato il semicerchio omogeneo di raggio R suddiviso in rettangoli verticali di base infinitesima dx e di altezza $\ell(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ (questa deriva dalla forma della circonferenza $x^2 + y^2 = R^2$ che limita in cerchio e di cui si prende la semicirconferenza superiore e dal diametro coincidente con l'asse x ovvero $y = 0$) e quindi il loro CM è in $\frac{1}{2}\ell(x)$ e massa pari a $dm = \sigma\, dA = \sigma\, \ell(x)\, dx$, sommando sui vari rettangoli $\rightarrow MY = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\ell(x)\; dm = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\ell(x) \sigma\, \ell(x)\, dx =$ $\int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\sigma\, (R^2 - x^2)\, dx =$

$\frac{1}{2}\sigma R^2 \int_{-R}^{R} \; dx - \frac{1}{2}\sigma \int_{-R}^{R} \; x^2\, dx = \frac{1}{2}\sigma R^2 [R - (-R)] - \frac{1}{2}\sigma \left[\frac{R^3}{3} - \left(-\frac{R^3}{3}\right)\right] = \sigma R^3 - \frac{1}{3}\sigma R^3 = \frac{2}{3}\sigma R^3$

ma la massa totale vale $M = \frac{1}{2}\sigma\pi R^2 \rightarrow Y = \frac{4}{3\pi}\frac{\sigma R^3}{\sigma R^2} = \frac{4}{3\pi} R$ quindi, per il semicerchio omogeneo con centro nell'origine, la posizione del CM è $\vec{R} = (0, \frac{4}{3\pi} R\,)$, perciò, con 3 cifre significative ad altezza $0.424\, R$.

Esempio: calcolare la posizione del CM per un triangolo rettangolo omogeneo di massa m di lati a, b, c.
Soluzione: Indicheremo con le lettere dei lati anche le loro lunghezze. Per semplicità poniamo il triangolo appoggiato sul cateto a coincidente con l'asse x come in figura. La densità superficiale sarà $\sigma = \frac{m}{A}$ con $A = \frac{1}{2}ac$ area del triangolo.



Calcoliamo con metodo additivo la posizione del CM.
In tal caso utilizziamo rettangoli infinitesimi compresi tra l'asse x e il lato b. Questo lato giace sulla retta $y = c - \frac{c}{a}x$ perciò l'latezza del rettangolo è $h(x) = c - \frac{c}{a}x$ e la sua area è $dA = h(x)dx = c\,dx - \frac{c}{a}x\,dx$ mentre la posizione del CM è $y = \frac{1}{2}h(x)$ da cui $mY = \int y\,dm = \int \frac{1}{2}h(x)\sigma dA = \int \frac{1}{2}h(x)\sigma(c\,dx - \frac{c}{a}x\,dx) = \int \frac{1}{2}(c - \frac{c}{a}x)\sigma(cdx - \frac{c}{a}x\,dx) = \frac{1}{2}\sigma\left[\int_0^a c^2\,dx - 2\int_0^a \frac{c^2}{a}x\,dx + \int_0^a \frac{c^2}{a^2}x^2dx\right] = \frac{1}{2}\sigma\left[ac^2 - ac^2 + \frac{ac^2}{3}\right] = \sigma(\frac{1}{2}ac)\frac{c}{3}$ ma $\sigma\left(\frac{1}{2}ac\right) = m$ massa del triangolo rettangolo e quindi $Y = \frac{mY}{m} = \frac{c}{3}$
Lungo x la posizione del CM è $x + \frac{1}{2}dx = x$ trascurando termini infinitesimi e $mX = \int x\,dm = \int x\,\sigma dA = \sigma\int_0^a x\left(cdx - \frac{c}{a}x\,dx\right) = \sigma\int_0^a x\,cdx - \sigma\int_0^a \frac{c}{a}x^2\,dx = \sigma\left(\frac{1}{2}(ac)a - \frac{1}{3}(ac)a\right) = 2ma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}ma$
Da cui $X = \frac{1}{3}a$ valore consistente col fatto che scambiando i cateti il risultato deve essere uguale.

Esempio: calcolare la posizione del CM di un cono retto omogeneo di massa M, raggio di base R e altezza h.
Soluzione: il cono sia posto con la base nel piano xy (z=0) e in centro nell'origine. La sua densità è costante (per l'omogeneità) e vale $\rho = \frac{M}{V_{ol}} = \frac{M}{V_{ol}} = \frac{3M}{\pi R^2 h}$. Per simmetria il CM giace sull'asse del cono.
Consideriamo le sezioni ad una certa altezza $0 \le z \le h$: se $z = 0$ il raggio della sezione è pari a R, se $z = h$ il raggio è 0; per ciascuna altezza da 0 ad h il raggio vale $r(z) = \frac{0-R}{h-0}(z-h) = \frac{-R}{h}(z-h) = \frac{R}{h}(h-z) = R - \frac{R}{h}z.$
Suddividiamo il cono in cilindri di spessore infinitesimo dz ovvero considerando le sezioni, ciascuna di queste ha un volume $\pi\, r(z)^2dz$ e una massa $dM = \rho\,\pi\, r(z)^2dz$, la coordinata del suo CM si trova ad altezza z e questo porta un contributo al CM complessivo $zdM = z\,\rho\,\pi\, r(z)^2dz$ (in realtà l'altezza del CM vale $z + \frac{1}{2}dz$ ma moltiplicando per la massa $(z + \frac{1}{2}dz)\,\rho\,\pi\, r(z)^2dz$ si ottiene un termine aggiuntivo $\frac{1}{2}\,\rho\,\pi\, r(z)^2dz^2$ al secondo ordine in dz che si può trascurare).
Sommando sui vari termini $MZ = \int_0^h z\,dM = \int_0^h z\,\rho\,\pi\, r(z)^2dz = \int_0^h z\,\rho\,\pi\,\left(R - \frac{R}{h}z\right)^2dz =$

$$\int_0^h z\,\rho\,\pi\, R^2dz - 2\int_0^h z\,\rho\,\pi\,\frac{R^2}{h}zdz + \int_0^h z\,\rho\,\pi\,\frac{R^2}{h^2}z^2dz =$$

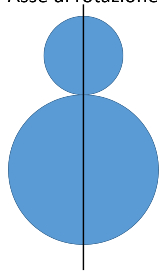
$$\rho\,\pi\,R^2\int_0^h z\,dz-2\rho\,\pi\,\frac{R^2}{h}\int_0^h z^2dz+\rho\,\pi\,\frac{R^2}{h^2}\int_0^h z^3dz=$$

$$\rho\,\pi\,R^2\frac{h^2}{2}-2\rho\,\pi\,\frac{R^2}{h}\frac{h^3}{3}+\rho\,\pi\,\frac{R^2}{h^2}\frac{h^4}{4}=\rho\,\pi\,R^2\frac{h^2}{2}-2\rho\,\pi\,R^2\frac{h^2}{3}+\rho\,\pi\,R^2\frac{h^2}{4}=$$

$$\rho\,\pi R^2h^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\rho\,\pi R^2h^2\left(\frac{1}{12}\right)\rightarrow Z=\frac{1}{12}\frac{\rho\,\pi R^2h^2}{M}=\frac{1}{12}\frac{3M}{\pi R^2h}\frac{\pi R^2h^2}{M}=\frac{1}{4}h.$$

Per il calcolo del momento di inerzia per rotazioni attorno ad un asse, se il corpo è composto da corpi non puntiformi di massa M_i di cui si conosce il momento di inerzia I_i rispetto **allo stesso asse**, applicando il metodo additivo, il momento di inerzia complessivo è $I=\sum_i^N I_i$.

Esempio: trovare il momento di inerzia per un corpo formato da due sfere di raggi R e r incollate tra loro e fatte ruotare attorno all'asse come in figura.



Soluzione: Il momento di inerzia per la sfera fatta ruotare attorno ad un asse passante per il centro è $I_{CM}=\frac{2}{5}MR^2$ e per il sistema delle due sfere $I=\frac{2}{5}MR^2+\frac{2}{5}Mr^2$

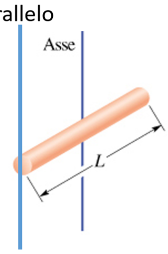
Le tabelle riportano il momento d'inerzia baricentrale I_{CM} mentre il corpo di massa M può ruotare attorno ad un asse parallelo a questo, a, ma non passante per il CM.

Il **teorema degli assi paralleli o teorema di Steiner** permette di ottenere il nuovo momento di inerzia $I_a=I_{CM}+Md^2$ con d la distanza fra i due assi paralleli.
Per dimostrarlo, definiamo due sistemi di riferimento, il primo x,y,z con l'asse z lungo l'asse di rotazione passante per il CM, origine nel CM e asse x passante per il secondo asse di rotazione a, il secondo x'y'z' traslato rispetto al primo lungo x, con l'asse z' coincidente con l'asse di rotazione a e quindi traslato di d lungo x: le coordinate dei punti sono tra loro legate nel seguente modo y'=y, z'=z mentre x'=x-d.

Possiamo calcolare direttamente

$$\begin{aligned}I_a&=\int r'^2dm=\int(x'^2+y'^2)dm\\&=\int((x-d)^2+y'^2)dm=\int(x^2+y^2)dm+\int(2xd)\,dm+\int d^2dm\\&=I_{CM}+2d\int x\,dm+d^2\int dm\\&=I_{CM}+Md^2\end{aligned}$$

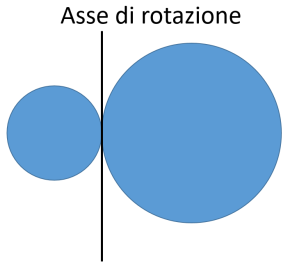
Perché $\int x\,dm=MR_x=0$ essendo la posizione del CM nel sistema x,y,z, che ha l'origine nel CM e perciò la sua posizione è pari a zero (0,0,0).



Esempio: il momento di inerzia di un'asta omogenea per l'asse baricentrale vale $I_{CM}=\frac{1}{12}M\ell^2$. Se l'asta viene fatta ruotare attorno ad un asse parallelo passante per un estremo dell'asta (a distanza $d=\ell/2$) applicando il teorema degli assi paralleli

$I_a = I_{CM} + Md^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3}M\ell^2$

Esempio: trovare il momento di inerzia per un corpo formato da due sfere di raggi R e r incollate tra loro e fatte ruotare attorno all'asse come in figura.

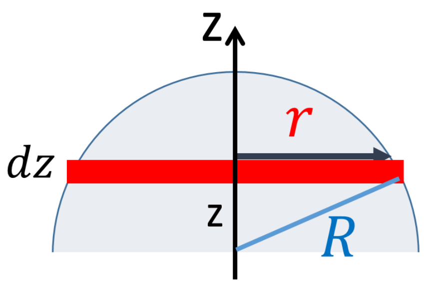


Soluzione: Il momento di inerzia per la sfera fatta ruotare attorno ad un asse passante per il centro è $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$ mentre se è spostato sul bordo della sfera, dal teorema degli assi paralleli, $I_b = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$ e per il sistema delle due sfere $I = \frac{7}{5}MR^2 + \frac{7}{5}Mr^2$

Esempio: calcolo momento di inerzia di un anello omogeneo di raggio R e massa m rispetto ad un asse di rotazione passante per il centro e perpendicolare al piano dell'anello.
Soluzione: poniamo il piano xy nel piano dell'anello con l'origine nel centro dove passa l'asse di rotazione.
Ogni elemento di massa dm dell'anello si trova alla distanza R e quindi $I = \int r^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$.

Esempio: calcolo momento di inerzia del disco omogeneo di massa M e raggio R rispetto ad un asse passante per il centro e perpendicolare al piano del disco.
Soluzione: utilizzando il risultato per l'anello, consideriamo il disco come formato da anelli di spessore infinitesimo e raggio r aventi massa $dm = \sigma dA = \sigma\, 2\pi r dr$ ciascuno contribuisce con $dI = r^2 dm$ da cui $I = \int dI = \int r^2 dm = \int r^2 \sigma\, 2\pi r dr = \sigma\, 2\pi \int_0^R r^3 dr = \sigma\, 2\pi \frac{R^4}{4} = \sigma\, (\pi R^2)\frac{R^2}{2}$
ma $M = \sigma\, (\pi R^2) \rightarrow I = \frac{1}{2}MR^2$

Esempio: calcolo momento di inerzia della semisfera omogenea di raggio R e massa M rispetto ad un asse passante per il centro e perpendicolare al cerchio massimo di base.
Soluzione: una prima soluzione può essere considerare semplicemente che una sfera è l'unione di di due semisfere per cui se per la sfera di massa $2M$ il momento di inerzia è $I_{sfera} = \frac{2}{5}(2M)R^2$, per la semisfera è $I = \frac{1}{2}I_{sfera} = \frac{2}{5}MR^2$.



Invece un calcolo esplicito può utilizzare il risultato per il disco, considerando la semisfera come formata da dischi di spessore infinitesimo dz (o cilindri) il cui raggio parte da quello massimo e si riduce a zero con il piano del cerchio massimo coincidente con il piano xy come mostrato in figura.
La densità volumetrica $\rho = \frac{M}{V_{ol}} = \frac{M}{\frac{4}{6}\pi R^3}$
Il raggio del disco dipende dalla quota $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ e il momento di inerzia del disco $dI = \frac{1}{2}(R^2 - z^2)dm = \frac{1}{2}(R^2 - z^2)\rho\, dV_{ol}$, con il volume del disco $dV_{ol} = \pi\big(r(z)\big)^2 dz = \pi(R^2 - z^2)dz$. Il momento della semisfera è perciò $I = \int dI = \int_0^R \frac{1}{2}(R^2 - z^2)\rho\, \pi(R^2 - z^2)dz = \frac{1}{2}\pi\rho \int_0^R (R^4 - 2R^2z^2 + z^4)\, dz =$

$$\frac{1}{2}\pi\rho\int_0^R (R^4 - 2R^2z^2 + z^4)\,dz = \frac{1}{2}\pi\rho R^4\int_0^R dz - \pi\rho R^2\int_0^R z^2dz + \frac{1}{2}\pi\rho\int_0^R z^4dz =$$

$\frac{1}{2}\pi\rho R^5 - \frac{1}{3}\pi\rho R^5 + \frac{1}{10}\pi\rho R^5 = \pi\rho R^5\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right) = \frac{8}{30}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{6}\rho\pi R^3\right)R^2$ da cui $I = \frac{2}{5}MR^2$

Esempio: calcolo momento di inerzia del cono retto omogeneo di massa M, raggio di base R e altezza h rispetto ad un asse coincidente con l'asse di simmetria del cono.

Soluzione: Il calcolo esplicito può utilizzare il risultato per il disco, considerando il cono come formato da dischi di spessore infinitesimo dz il cui raggio parte da quello massimo e si riduce a zero con il piano di base coincidente con il piano xy.

La densità volumetrica $\rho = \frac{M}{V_{ol}} = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2 h}$

Il raggio del disco dipende dalla quota $r(z) = R - \frac{R}{h}z$ e il momento di inerzia del disco $dI = \frac{1}{2}\left(R - \frac{R}{h}z\right)^2 dm = \frac{1}{2}\left(R - \frac{R}{h}z\right)^2 \rho\, dV_{ol}$, con il volume del disco $dV_{ol} = \pi\big(r(z)\big)^2 dz = \pi\left(R - \frac{R}{h}z\right)^2 dz$. Il momento del cono è perciò

$$I = \int dI = \int_0^h \frac{1}{2}\left(R - \frac{R}{h}z\right)^2 \rho\,\pi\left(R - \frac{R}{h}z\right)^2 dz = \frac{1}{2}\pi\rho\int_0^h \left(R - \frac{R}{h}z\right)^4 dz =$$

$$\frac{1}{2}\pi\rho\left(\int_0^h R^4\,dz - 4\int_0^h \frac{R^4}{h}zdz + 6\int_0^h \frac{R^4}{h^2}z^2dz - 4\int_0^h \frac{R^4}{h^3}z^3dz + \int_0^h \frac{R^4}{h^4}z^4dz\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho R^4\left(h - 4\frac{h^2}{2h} + 6\frac{h^3}{3h^2} - 4\frac{h^4}{4h^3} + \frac{h^5}{5h^4}\right) =$$

$\frac{1}{2}\pi\rho R^4 h\left(1 - 2 + 2 - 1 + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10}\pi\rho R^4 h = \frac{3}{10}\left(\frac{1}{3}\rho\pi R^2 h\right)R^2$ da cui $I = \frac{3}{10}MR^2$

G. Bracco