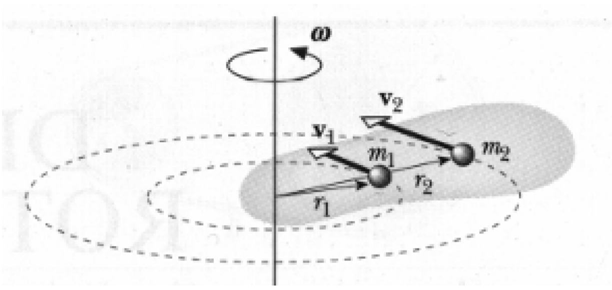
VIII PARTE: Corpo rigido

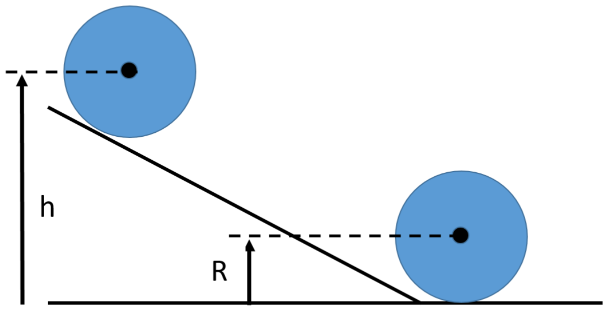
1) Energia cinetica e potenziale

L'energia cinetica di un sistema sarà la somma dell'energia cinetica dei vari punti materiali che formano il sistema $K = \sum_1^N \frac{1}{2} m_i {v_i}^2$.



Se il corpo è rigido e ruota intorno ad un asse fisso, tutti i suoi punti materiali compiono traiettorie circolari di raggi rispettivamente r_i con la stessa velocità angolare ω.
Dalla cinematica $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, e la velocità sarà esprimibile come $v_i = \omega r_i$ (r_i distanza dall'asse di rotazione) e quindi $K = \frac{1}{2} \sum_1^N m_i {r_i}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} (\sum_1^N m_i {r_i}^2) \omega^2$ ma $I_a = (\sum_1^N m_i {r_i}^2)$ rappresenta il momento di inerzia per la rotazione attorno all'asse e quindi l'energia cinetica di rotazione attorno all'asse vale $K_{rot} = \frac{1}{2} I_a \omega^2$.

L'energia potenziale si riferisce alla posizione del CM, punto a cui è applicata la forza peso. Da questo punto di vista il calcolo non differisce dal caso del punto materiale ma bisogna prestare attenzione alle dimensioni del corpo.
Ad esempio nella figura è mostrata una sfera che partendo da ferma sulla sommità del piano inclinato ad altezza h rispetto al piano orizzontale (scelto come quota di riferimento) raggiunge il piano orizzontale finale ma il suo CM è ad altezza R, raggio della sfera, mentre se la sfera fosse considerata puntiforme l'altezza finale risulterebbe nulla.



2) Lavoro

Consideriamo un sistema formato da punti materiali e indichiamo con l'indice j le forze interne e con l'indice k quelle esterne al sistema. La forza risultante che agisce su un punto i-esimo $\sum_{j,k} (\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ki})$ e il lavoro infinitesimo per lo spostamento infinitesimo $d\vec{s}_i$ del singolo punto sarà $d\mathcal{L}_i = \sum_{j,k} (\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ki}) \bullet d\vec{s}_i$.
Possiamo integrare sugli spostamenti e poi sommare tali lavori su tutti i punti del sistema ma teniamo per il momento questa espressione sui lavori infinitesimi sommata sui punti del sistema $\sum_i \ d\mathcal{L}_i = \sum_i (\sum_{j,k} (\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ki}) \bullet d\vec{s}_i)$.
Separiamo
- i lavori delle forze esterne $\sum_i (\sum_k \ \vec{F}_{ki} \bullet d\vec{s}_i)$ e
-i lavori delle forze interne $\sum_i (\sum_j \ \vec{F}_{ji} \bullet d\vec{s}_i)$
Alla forze interne applichiamo il terzo principio tra le coppie di punti i e j ottenendo termini del tipo $\vec{F}_{j\to i} \bullet d\vec{s}_i + \vec{F}_{i\to j} \bullet d\vec{s}_j = \vec{F}_{j\to i} \bullet d\vec{s}_i - \vec{F}_{j\to i} \bullet d\vec{s}_j = \vec{F}_{j\to i} \bullet (d\vec{s}_i - d\vec{s}_j)$.
In generale **i punti avranno spostamenti diversi e quindi il lavoro delle forze interne non è nullo**.

Per ciascun punto vale il teorema lavoro energia, sommando su tutti i punti, la variazione totale dell'energia cinetica del sistema $K_f - K_i$ dipenderà sia dai lavori delle forze esterne sia dai lavori delle forze interne $\Delta K = \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{ext}$.

Inoltre la conservazione dell'energia richiede che sia le forze esterne sia quelle interne siano conservative.

Se però consideriamo un sistema che sia un corpo rigido allora $d\vec{s}_i = d\vec{s}_j$ →**il lavoro delle forze interne per un corpo rigido si annulla** e $\Delta K = \mathcal{L}_{ext}$.

La definizione di lavoro di una forza $\mathcal{L} = \int \vec{F} \bullet d\vec{s}$ può essere specializzata al caso di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso.
Infatti $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ e $d\vec{s} = \vec{v}dt = \vec{\omega} \times \vec{r}dt$ e quindi $\mathcal{L} = \int \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int \vec{F} \bullet \vec{\omega} \times \vec{r}dt$ ma il prodotto misto può essere riordinato diversamente (dispensa A1) da cui
$\mathcal{L} = \int \vec{\omega} \bullet (\vec{r} \times \vec{F})dt = \int \vec{\tau} \bullet \vec{\omega}dt$ ma in un tempo dt e prese le componenti lungo l'asse di rotazione (supponiamo asse z: τ_z e ω) che è l'unica direzione in cui il corpo può ruotare di un angolo $d\theta = \omega\, dt$, il lavoro si esprime come

$$\mathcal{L} = \int \tau_z \, d\theta$$

Osserviamo che gli eventuali altri componenti $\vec{\tau}_x$ e $\vec{\tau}_y$ saranno compensati dai cuscinetti che mantengono l'asse di rotazione fisso.

Dal confronto con la definizione di potenza, che per la traslazione era $P = \vec{F} \bullet \vec{v}$, si vede che nel caso rotazionale è $P = \vec{\tau} \bullet \vec{\omega} = \tau_z \omega$.

3) Primo teorema di König

Questo teorema afferma dimostra che il momento angolare di un sistema qualsiasi è la somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa e del momento angolare del sistema.
Per dimostrarlo si parte dalla definizione di momento angolare rispetto ad un sistema di riferimento
$\vec{L} = \sum_1^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$
Poi si riscrive la posizione utilizzando la posizione del CM $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i$ che derivata fornisce $\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}'_i$ e quindi $\vec{L} = \sum_1^N (\vec{R} + \vec{r}'_i) \times m_i (\vec{V} + \vec{v}'_i)$.
Si ottengono 4 termini
- $\vec{R} \times \vec{V} \sum_1^N m_i = \vec{R} \times M\vec{V} = \vec{L}_{CM}$ momento angolare del CM, con $\sum_1^N m_i = M$
- $\sum_1^N (m_i \vec{r}'_i) \times (\vec{V}) = \vec{0}$ perché nel sistema del CM la sua posizione si annulla $\sum_1^N (m_i \vec{r}'_i) = \vec{0}$
- $\sum_1^N (\vec{R}) \times (m_i \vec{v}'_i) = \vec{0}$ perché derivando $\sum_1^N (m_i \vec{r}'_i) = \vec{0}$ si ottiene $\sum_1^N (m_i \vec{v}'_i) = \vec{0}$
- $\sum_1^N (\vec{r}'_i) \times (m_i \vec{v}'_i) = \vec{L}'$ momento angolare rispetto al CM, quello intrinseco del corpo

E quindi $\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}'$.

Nel caso di un corpo rigido, il momento angolare intrinseco è esprimibile da $\vec{L}' = \overleftrightarrow{I}_{CM}\vec{\omega}$ con polo nel CM.
Per rotazione attorno ad un asse fisso baricentrale $\vec{L} = \vec{L}'$ e la componente lungo l'asse $L' = I_{CM}\omega$.

4) Secondo teorema di König

Questo teorema permette di separare l'energia cinetica di un sistema in due parti, una riferita la moto globale del sistema e una riferita al moto rispetto al CM.
Dalla definizione per un sistema di punti $K = \sum_1^N \frac{1}{2} m_i {v_i}^2$ riscriviamo la velocità considerando il sistema del CM $\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}'_i$ e quindi

$$K = \sum_1^N \frac{1}{2} m_i (\vec{V} + \vec{v}'_i) \bullet (\vec{V} + \vec{v}'_i)$$

Si ottengono 4 termini

- $\sum_1^N \frac{1}{2} m_i (\vec{V}) \bullet (\vec{V}) = \frac{1}{2} M V^2$ energia cinetica di traslazione del CM K_{CM}
- $\sum_1^N \frac{1}{2} m_i (\vec{v}'_i) \bullet (\vec{v}'_i) = K'$ e energia cinetica rispetto al CM
- $\sum_1^N \frac{1}{2} m_i (\vec{v}'_i) \bullet (\vec{V})$ oppure $\sum_1^N \frac{1}{2} m_i (\vec{V}) \bullet (\vec{v}'_i)$ che sono nulli perché, come visto per il primo teorema $\sum_1^N (m_i \vec{v}'_i) = \vec{0}$

Da cui $K = K_{CM} + K'$.

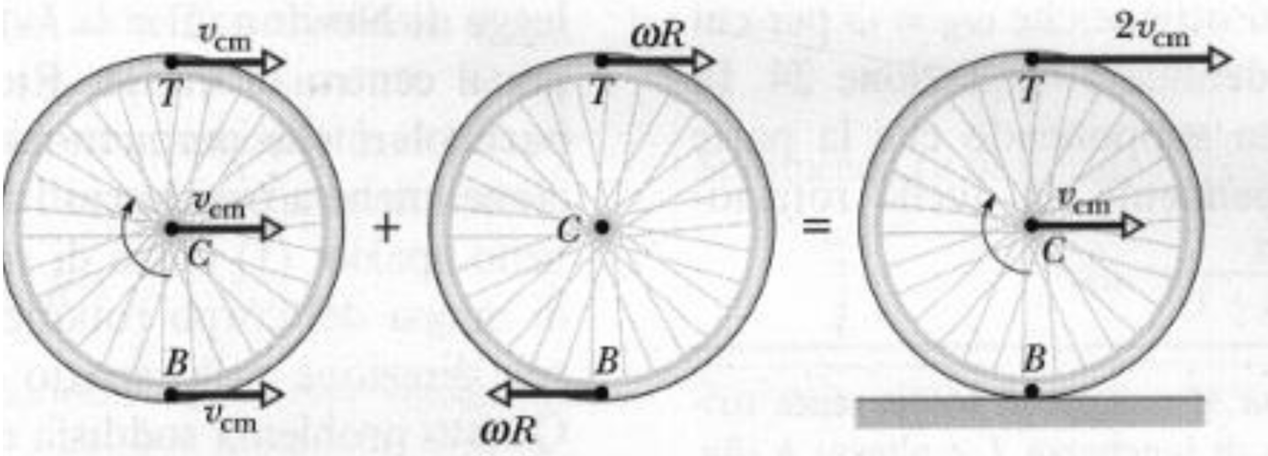
Per un corpo rigido, la parte di energia riferita al moto rispetto al CM è quella di rotazione e quindi $K = \frac{1}{2} M V^2 + \vec{\omega} \bullet \frac{1}{2} \overleftrightarrow{I}_{CM} \vec{\omega}$ in cui si vede chiaramente la separazione in **energia traslazionale** $K_{tr} = \frac{1}{2} M V^2$ e **energia rotazionale**$K_{rot} = \vec{\omega} \bullet \frac{1}{2} \overleftrightarrow{I}_{CM} \vec{\omega}$.

Nel nostro caso di rotazione attorno ad un asse fisso, $K = K_{tr} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$.

5) Moto di puro rotolamento

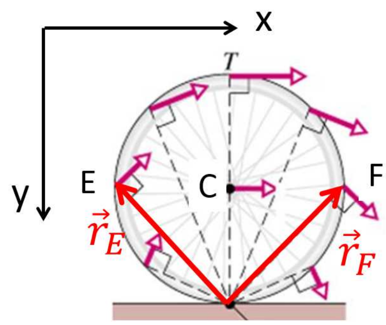
Se consideriamo il moto dei corpi rigidi, questo si può considerare scomponibile in una successione di atti di moto (che avvengono in un tempo infinitesimo) che sono traslazionali (tutto il corpo subisce lo stesso spostamento del centro di massa) e rotazionali (tutte le parti del corpo ruotano con la stessa velocità angolare) intorno ad assi passanti per il centro di massa come espresso dal secondo teorema di König.

Casi particolari di moto rototraslatorio sono quelli in cui l'asse di rotazione, passante per il centro di massa, mantiene durante il moto lo stesso orientamento. Ciò accade per esempio nel moto di rotolamento di una ruota.
In tale moto il **punto di contatto** della ruota con il terreno può:
-i) strisciare e per tale condizione non esiste nessun legame tra la rotazione e la traslazione
-ii) non strisciare ed essere istantaneamente fermo col terreno, per tale condizione esiste un legame tra rotazione e traslazione.



Il secondo caso è il moto di puro rotolamento e lo analizziamo separando il moto in un moto di pura traslazione e in un moto di pura rotazione, la sovrapposizione dei due moti, come rappresentato schematicamente in figura, fornirà il moto complessivo.
Per pura traslazione tutti i punti si muovono con la stessa velocità del CM (nella figura $\vec{v}_{CM}$), per pura rotazione il centro C è fermo mentre punti diametralmente opposti hanno velocità opposte, ad esempio sul bordo della ruota di raggio R il modulo della velocità vale $v_R = \omega R$ con ω la velocità angolare della ruota assunta positiva (asse su cui proiettare con orientazione entrante).
Se imponiamo che, sovrapponendo i moti, non ci sia strisciamento nel punto di contatto B allora
$\vec{v}_B = \vec{v}_{RB} + \vec{v}_{CM} = \vec{0}$ →**condizione di puro rotolamento**
E quindi $\vec{v}_{CM} = -\vec{v}_{RB}$ e in modulo $v_{CM} = \omega R$. Da notare che come componenti orizzontali (x) $v_{CMx} = \omega R$ e $v_{RBx} = -\omega R$.
A questo proposito, è sempre bene verificare con quale segno sia da utilizzare la condizione di puro rotolamento $v_{CM} = \pm\omega R$ in base alle componenti sugli assi.

Nel caso di puro rotolamento si può osservare che combinando le velocità, queste sono sempre perpendicolari al vettore che unisce il punto B (punto di contatto) con il punto in cui si valuta la velocita: ad esempio, introducendo anche l'asse y verticale verso il basso (terna destrorsa per avere asse z entrante e $\omega > 0$), nei punti E e F (estremi del diametro della ruota cha giace in orizzontale) la velocità dovuta alla rotazione è $\vec{v}_{RE} = (0, -\omega R)$ (cioè diretta in alto) $\vec{v}_{RF} = (0, \omega R)$ (diretta in basso) mentre quella dovuta alla rotazione è $\vec{v}_{CM} = (\omega R, 0) \rightarrow \vec{v}_E = \vec{v}_{RE} + \vec{v}_{CM} = (\omega R, -\omega R)$ e $\vec{v}_F = \vec{v}_{RF} + \vec{v}_{CM} = (\omega R, \omega R)$ cioè entrambi i vettori sono inclinati di 45° rispetto all'orizzontale, per E rivolto verso l'alto, per F rivolto verso il basso come mostrato in figura (vettori viola).



Asse di pura rotazione in B

D'altra parte i due vettori posizione (rossi) hanno componenti $\vec{r}_E = (-R, -R)$ e $\vec{r}_F = (R, -R)$ e facendo il prodotto scalare $\vec{r}_E \bullet \vec{v}_E = -\omega R^2 + \omega R^2 = 0$ e $\vec{r}_F \bullet \vec{v}_F = \omega R^2 - \omega R^2 = 0$ e quindi sono perpendicolari.

Verifichiamo per esercizio che $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$:

per E $\vec{v}_E = \vec{\omega} \times \vec{r}_E = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -R & -R & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0 + \omega R) - \hat{\jmath}(0 + \omega R) = (\omega R, -\omega R, 0)$

per F $\vec{v}_F = \vec{\omega} \times \vec{r}_F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R & -R & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0 + \omega R) - \hat{\jmath}(0 - \omega R) = (\omega R, \omega R, 0)$

L'osservazione precedente permette di considerare il punto di contatto come un **asse istantaneo di rotazione.**
Se consideriamo l'energia cinetica di un corpo che ha moto di puro rotolamento

$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

utilizzando la condizione di puro rotolamento

$$K = \frac{1}{2} M (\omega R)^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 = \frac{1}{2}(I_{CM} + M R^2)\omega^2$$

ma dal teorema degli assi paralleli $I_{CM} + MR^2 = I_B$ è il momento di inerzia per rotazione attorno all'asse (istantaneo) in B
→ si può pensare che il corpo stia **solo ruotando** attorno all'asse istantaneo B con energia $K_{rot} = \frac{1}{2} I_B \omega^2$.

- Se il corpo ha moto di **puro rotolamento** si può prendere come polo il punto di contatto (che ha anche velocità parallela al CM) e analizzare il moto di puro rotolamento in questo modo.

- Se il punto di contatto **striscia**, tale analisi non è possibile e il polo deve necessariamente essere preso nel CM.

6) Urti tra corpi non vincolati e vincolati

Abbiamo già considerato il problema dell'urto di 2 punti materiali.
Lo abbiamo trattato come un sistema isolato e perciò si conserva la quantità di moto, quindi detto t_i l'istante immediatamente prima dell'urto e t_f quello immediatamente dopo l'urto ($\Delta t = t_f - t_i$) $\vec{P}_f = \vec{P}_i$.

Osserviamo che occorre specificare che i corpi siano liberi di muoversi (in un piano o nello spazio), invece se almeno uno è costretto da un vincolo a poter solo ruotare senza poter traslare (p.es. asta vincolata o una porta vincolata dai cardini), durante l'urto **il vincolo introduce una forza impulsiva** (la sua reazione vincolare) **che non permette la conservazione della quantità di moto del sistema dei due corpi urtanti**.
Analogamente al caso lineare è possibile introdurre un impulso angolare $\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\tau} dt$ e dimostrare il teorema $\int_{t_i}^{t_f} \vec{\tau} dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{L}}{dt} dt = \vec{\ell}_f - \vec{\ell}_i = \Delta\vec{\ell}$ cioè la variazione di momento angolare sul singolo corpo è pari all'impulso angolare.

È possibile introdurre un momento medio della forza $\vec{\tau}_m$ nel tempo $\Delta t = t_f - t_i$ come il momento della forza che produce lo stesso effetto sul momento angolare $\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\tau} dt = \vec{\tau}_m \, \Delta t$.

I momenti delle forze scambiati tra i corpi che si urtano sono impulsivi e **interni** da cui se 1 è il punto materiale e 2 il corpo rigido $\vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{0}$ (perché $\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{0}$) e complessivamente durante l'urto $\vec{L}_f = \vec{L}_i$, conservazione del momento angolare.

Anche nel caso dell'urto tra un punto materiale e un corpo rigido, l'urto può essere classificato come elastico se viene conservata l'energia o anelastico se viene dissipata.
Nel caso di urto totalmente anelastico, dopo l'urto, il punto materiale e il corpo rigido rimangono a contatto anche dopo l'urto. Questo modifica la massa complessiva del corpo rigido dopo l'urto. Questa aggiunta di massa localizzata potrebbe modificare sia la posizione del CM sia il suo momento di inerzia.

a) Urto tra un punto materiale e un corpo rigido libero
   In tal caso nell'urto si conserva sia la quantità di moto del sistema e, sempre in approssimazione impulsiva, anche il momento angolare del sistema, valutato rispetto al polo coincidente con il CM.
   Il corpo rigido dopo l'urto modifica la sua rotazione attorno al CM.

b) Urto tra un punto materiale e un corpo rigido vincolato

   Per trattare questo problema è opportuno porre il polo nella posizione del vincolo in modo da eliminare il momento della reazione vincolare: con tale scelta **si conserva il momento angolare lungo questo asse**.

   Quindi detto t_i l'istante immediatamente prima dell'urto e t_f quello immediatamente dopo l'urto ($\Delta t = t_f - t_i$) si conserva la componente lungo questo asse di rotazione (supponiamo l'asse parallelo all'asse z) $L_{fz} = L_{iz}$.

   Dalla relazione $\ell_{2z} = I_z \omega$ è possibile ricavare le variazioni di velocità angolare del corpo rigido. Il CM del corpo rigido non sarà posto sull'asse di rotazione in generale e quindi il CM eseguirà un moto circolare e sarà perciò sottoposto ad un'accelerazione centripeta fornita dalla risultante delle forze, questo solleciterà il perno fisso attorno a cui ruota, perno che reagirà con una forza uguale e opposta impulsiva che non permette la conservazione della quantità di moto del sistema.

Poiché la casistica è ampia, per una esemplificazione dei concetti si rimanda agli esercizi risolti.