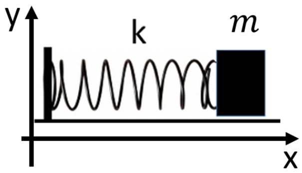
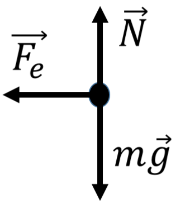
IX PARTE: Oscillazioni

Le oscillazioni sono una parte della Fisica che ha implicazioni sia in Meccanica sia in Elettromagnetismo per rimanere nell'ambito del corso. Per le applicazioni, moti periodici si trovano sia nel funzionamento di motori (sia termici sia elettrici) in cui la rotazione dell'albero motore può eccitare vibrazioni nei corpi, sia nel moto di navi in cui l'eccitazione è dovuta al moto ondoso, quindi l'analisi della risposta delle strutture a queste sollecitazioni diviene un passo importante della progettazione.
Alla base delle oscillazioni vi è il sistema elastico più semplice, ad un grado di libertà, che è l'oscillatore armonico formato da una massa e da una molla.
Le deformazioni dei corpi anche più complessi in regime elastico possono essere pensate, per la parte dinamica, in termini di oscillatori.
Ricordiamo infatti che nei punti di minimo dell'energia potenziale, l'approssimazione quadratica in un intorno del minimo naturalmente porta a trattare il moto come se fosse quello di un oscillatore armonico (vedere dispensa su lavoro ed energia).

1) Oscillatore armonico

Riprendiamo l'esempio del moto di una massa m appoggiata su un piano liscio orizzontale ed attaccata ad una molla ideale di costante elastica k, **oscillatore armonico lineare**.





Il diagramma di corpo libero è quindi quello mostrato in figura e scegliamo il sistema di riferimento mostrato nella figura precedente con l'origine degli assi nella posizione di equilibrio della molla in modo che la componente sull'asse x è $F_e = -kx$. Inoltre supponiamo che il moto avvenga con la massa sempre a contatto con il piano orizzontale da cui $y = cost$.

Proiettiamo la legge di Newton
X: $-kx = ma$
Y: $N - mg = 0 \rightarrow N = mg$.
L'equazione differenziale $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ con il coefficiente della x positiva ($\frac{k}{m} > 0$) è detta **equazione armonica**.
La soluzione generale è

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$$

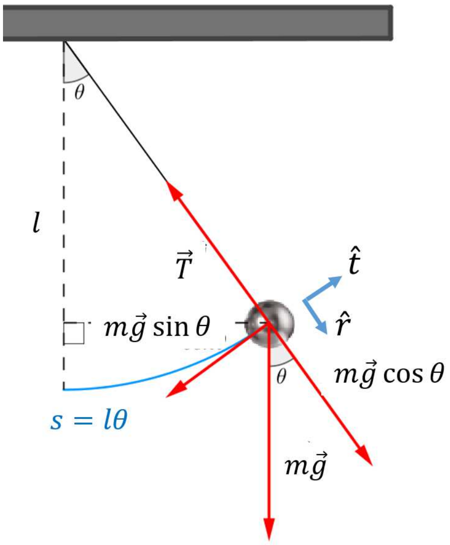
dove ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$, ω_0 pulsazione propria dell'oscillatore.
Osserviamo che maggiore è la massa e minore è la pulsazione, più rigido è il sistema maggiore è la pulsazione.
A volte si scrive una sola funzione ma con un angolo detto fase iniziale $\phi \rightarrow$
$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi)$
(oppure $x(t) = B\cos(\omega_0 t + \varphi)$) in modo da avere due costanti per poter verificare le condizione iniziali del moto (posizione e velocità).

L'energia del sistema massa-molla sarà ripartita tra energia potenziale ed energia cinetica, l'energia potenziale nei punti di inversione del moto ($x = \pm A$) viene convertita in energia cinetica che diviene massima quando la massa passa per la posizione di equilibrio $x = 0$.

Per semplicità consideriamo una soluzione del tipo
$$x(t) = A\sin(\omega_0 t)$$
la cui derivata è
$$v(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$
Valutiamo $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2(\sin(\omega_0 t))^2$ e $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2{\omega_0}^2(\cos(\omega_0 t))^2$ e l'energia totale $E = \frac{1}{2}kA^2(\sin(\omega_0 t))^2 + \frac{1}{2}mA^2{\omega_0}^2(\cos(\omega_0 t))^2 = \frac{1}{2}kA^2(\sin(\omega_0 t))^2 + \frac{1}{2}mA^2\frac{k}{m}(\cos(\omega_0 t))^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m{\omega_0}^2A^2$.
L'energia aumenta con il quadrato dell'ampiezza e il quadrato della frequenza di oscillazione ($\omega_0 = 2\pi f_0$ con f_0 frequenza e periodo $T_0 = 1/f_0$) a parità di massa.

2) Pendolo semplice

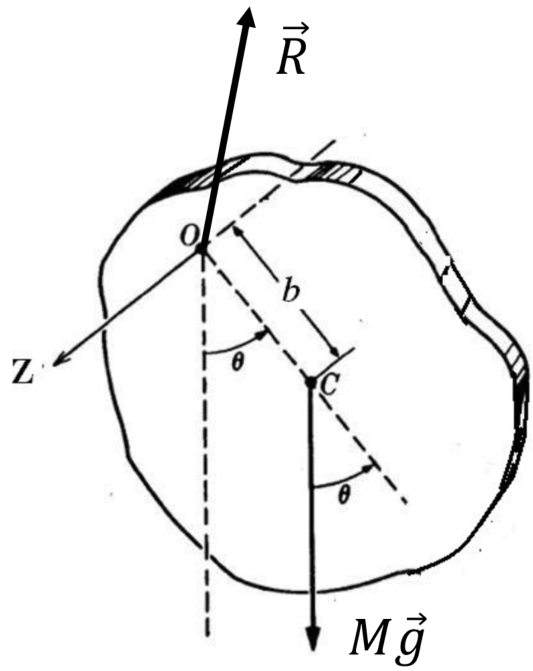
Un altro sistema di interesse per le oscillazioni è il sistema formato ad una massa m appesa ad un filo di massa trascurabile e lunghezza l. Se la massa viene spostata dalla verticale di un angolo θ e poi abbandonata, la massa inizia ad oscillare.



Le forze a cui è sottoposta la massa sono la forza peso $m\vec{g}$ e la tensione del filo $\vec{T}$.
Utilizzando un sistema di riferimento radiale e tangenziale proiettiamo la legge di Newton
Rad: $mg\ \cos\theta - T = -ma_c$
Tang: $-mg\sin\theta = ma_t$
La prima equazione fornisce la tensione del filo ma per il moto del filo è importante risolvere la seconda equazione. È utile utilizzare la relazione tra la lunghezza dell'arco e l'angolo $s = l\theta$ che derivata due volte permette di utilizzare solo variabili angolari e quindi sostituiamo $a_t = \alpha l = \frac{d^2\theta}{dt^2}l$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$
Questa equazione non è armonica ma se l'angolo massimo di oscillazione è limitato $\theta \ll 1$ (ovviamente con angoli in radianti) allora possiamo approssimare il seno col suo argomento → **approssimazione per piccole oscillazioni**
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$
Questa è un'equazione armonica con pulsazione propria ${\omega_0}^2 = \frac{g}{l}$ e la soluzione per piccole oscillazioni è $\theta(t) = \theta_A\cos\omega_0 t + \theta_B\sin\omega_0 t$, dive θ_A e θ_B sono le ampiezze massime.
Se calcoliamo la derivata $\frac{d\theta}{dt} = \omega = -\theta_A\omega_0\sin\omega_0 t + \theta_B\omega_0\cos\omega_0 t$, la velocità angolare massima ω della massa è proporzionale a ω_0 e nel tempo varia in modo sinusoidale.

3) Pendolo fisico

Se appendiamo un qualunque corpo rigido di massa M ad un punto di sospensione O senza attrito che passa per il CM, il corpo si trova in condizioni di equilibrio indifferente, la forza peso ha momento nullo rispetto al polo preso su O(≡CM) e, ruotando il corpo, qualunque posizione è di equilibrio.
Se spostiamo il punto di sospensione in un punto O diverso a distanza b dal CM, le condizioni di equilibrio richiedono che il CM sia sulla verticale al di sotto del punto di sospensione.
Se il corpo viene spostato dalla verticale di un angolo θ e poi abbandonato, il corpo inizia ad oscillare.
La Prima equazione cardinale contiene la reazione vincolare $\vec{R}$ ma non è utile per trattare il moto.
La Seconda equazione cardinale con polo sul punto di sospensione O ed asse di riferimento z perpendicolare al foglio uscente (rotazioni definite positive se antiorarie) con momento di inerzia I_0 è



Z: $-Mgb\sin\theta = I_O\alpha = I_o\frac{d^2\theta}{dt^2}$ che riordinata fornisce

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mgb}{I_o}\sin\theta = 0$$

Equazione simile a quella del pendolo semplice e quindi utilizziamo **l'approssimazione per piccole oscillazioni**

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mgb}{I_o}\theta = 0$$

E definendo $\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgb}{I_o}}$ la soluzione sarà $\theta(t) = \theta_A\cos\omega_0 t + \theta_B\sin\omega_0 t.$

4) Oscillatore smorzato

Se l'oscillatore armonico lineare si muove in un mezzo con attrito viscoso, caratterizzato da una forza $f_v = -\beta v$ con coefficiente $\beta > 0$, l'equazione in orizzontale deve essere modificata aggiungendo tale termine

X: $-kx - \beta v = ma$ e riscritta in termini delle derivate e riordinata

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Questa rappresenta l'equazione di un oscillatore armonico smorzato.

Per la soluzione possiamo partire dalla funzione esponenziale $x = Ae^{\lambda t}$ con il coefficiente λ da determinare e sostituendo nell'equazione si ottiene

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{\beta}{m}A\lambda e^{\lambda t} + \frac{k}{m}Ae^{\lambda t} = 0$$

Semplifichiamo i termini comuni

$$\lambda^2 + \frac{\beta}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Si ottiene un'equazione algebrica di secondo grado con soluzioni

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\beta}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}\right)$$

Le radici

- sono reali se il termini viscoso è maggiore di quello elastico $\left(\frac{\beta}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} > 0$,
- sono coincidenti reali se $\left(\frac{\beta}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} = 0$
- complesse coniugate se $\left(\frac{\beta}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} < 0$ ovvero se il termine elastico è superiore a quello viscoso $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[\frac{\beta}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}]$ ha una parte reale $\lambda_R = -\frac{1}{2}\frac{\beta}{m} = -b$ e una parte immaginaria $\lambda_I = \frac{1}{2}\sqrt{4\frac{k}{m} - \left(\frac{\beta}{m}\right)^2} = \frac{1}{2}2\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2} = \sqrt{{\omega_0}^2 - b^2} \rightarrow \lambda_{1,2} = \lambda_R \pm \lambda_I$ dove per semplicità abbiamo definito $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsazione propria dell'oscillatore, $\frac{\beta}{2m} = b > 0$ coefficiente di smorzamento.

Se la viscosità è bassa ci aspetteremmo una soluzione oscillante.

Analizziamo la funzione esponenziale con esponente immaginario ricordando che $i^2 = -1$, $i^3 = ii^2 = -i$, $i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$ etc.

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{1}{2}(ix)^2 + \frac{1}{2\cdot 3}(ix)^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}(ix)^4 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(ix)^5 \ldots. =$$
$$1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - i\frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + i\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots$$

Da cui si vede che i termini con esponente pari sono reali e quelli con esponenti dispari sono immaginari. Inoltre c'è l'alternanza dei segni, separando i termini reali da quelli immaginari

Reali: $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \cdots$

Immaginari: $x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots$

La prima serie rappresenta la funzione $\cos x$ mentre la seconda la funzione $\sin x$
$\rightarrow e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Inoltre per l'esponenziale valgono le proprietà delle potenze $e^{a+b} = e^a e^b$ quindi, per la soluzione a bassa viscosità, la soluzione è

$$x(t) = Ae^{\lambda_R t}e^{\pm i\lambda_I t}$$

Ovvero

$x_1(t) = Ae^{-bt}e^{-i\sqrt{{\omega_0}^2 - b^2}t}$ e $x_2(t) = Ae^{-bt}e^{i\sqrt{{\omega_0}^2 - b^2}t}$

Se proviamo a scriverle in termini delle funzioni trigonometriche

$$x_1(t) = Ae^{-bt}(\cos\sqrt{{\omega_0}^2 - b^2}t - i\sin\sqrt{{\omega_0}^2 - b^2}t)$$
$$x_2(t) = Ae^{-bt}(\cos\sqrt{{\omega_0}^2 - b^2}t + i\sin\sqrt{{\omega_0}^2 - b^2}t)$$

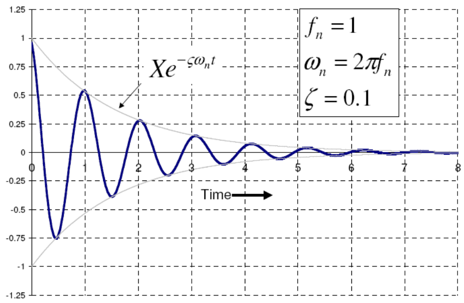
Le due soluzioni indipendenti si possono combinare tra loro per ottenerne di nuove

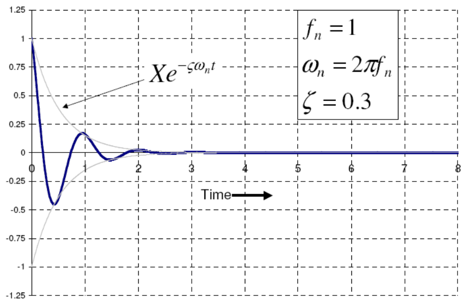
$$\frac{1}{2}\left(x_1(t)+x_2(t)\right) = \; Ae^{-bt}\cos\sqrt{{\omega_0}^2-b^2}t$$

$$\frac{1}{2}i\left(x_1(t)-x_2(t)\right) = \; Ae^{-bt}\sin\sqrt{{\omega_0}^2-b^2}t$$

Questo sono soluzioni indipendenti reali che corrispondono ad oscillazioni smorzate, l'ampiezza decade esponenzialmente nel tempo, la frequenza dell'oscillatore $\sqrt{{\omega_0}^2-b^2}$ è inferiore a quella dell'oscillatore non smorzato ω_0.

Nella figura presa da wikipedia si vede l'andamento oscillante con i massimi di oscillazione che decadono esponenzialmente per due diversi valori dello smorzamento.





Se si aumenta ulteriormente lo smorzamento, l'esponente λ diviene reale (questo corrisponde allo smorzamento critico) e le soluzioni non sono più oscillanti ma non tratteremo in specifico tali soluzioni.

L'aumento di viscosità introdotto da dispositivi come gli ammortizzatori possono essere di interesse per cancellare gli effetti dannosi (e fastidiosi) delle oscillazioni. Questo anche per strutture come ponti o palazzi.

5) Oscillatore forzato

Concludiamo questa analisi con il fatto che un oscillatore armonico lineare si mette in moto se esiste una qualche sollecitazione su di esso, chiameremo questa forza come forzante F(t).

Poiché le funzioni periodiche possono approssimare varie forme funzionali anche impulsive è utile prendere in considerazione una forzante con variazione temporale di tipo sinusoidale F(t)=$F_o \sin \omega t$ avente una pulsazione ω.

L'equazione dell'oscillatore si modifica in

X: $F(\mathrm{t}) - kx = ma \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$

Cerchiamo una soluzione particolare e sembra ragionevole che lo spostamento sia alla stessa pulsazione della forzante $x(t) = A\sin\omega t$, sostituendo

$$-A\omega^2\sin\omega t + {\omega_0}^2 A\sin\omega t = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

Semplificando il seno

$$A({\omega_0}^2-\omega^2) = \frac{F_0}{m} \rightarrow A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{{\omega_0}^2-\omega^2}$$

L'ampiezza di oscillazione che si instaura nell'oscillatore dipende dall'ampiezza della forzante ma esiste una forte dipendenza dalla pulsazione della forzante:

- se $\omega \ll \omega_0$ $\;A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{{\omega_0}^2}$ ampiezza costante e positiva quindi l'oscillatore segue la forzante (sfasamento 0°)

- se $\omega \gg \omega_0$ $\quad A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{-\omega^2} = -\frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega^2}$ l'ampiezza decade quadraticamente con ω e l'oscillazione è opposta a quella della forza (differenza di fase di 180°)
- se $\omega \sim \omega_0$ l'ampiezza di oscillazione è divergente $|A| \to \infty$ (il segno dipende se ω minore o maggiore di ω_0)

La divergenza è presente perché l'oscillatore non presenta effetti dissipativi.
Questo effetto di aumento dell'ampiezza quando la pulsazione della forzante è coincidente con la pulsazione propria è detto **risonanza**.
La soluzione per un oscillatore smorzato non è divergente ma presenta un massimo vicino alla pulsazione propria (con lo spostamento in pulsazione già visto nel caso dell'oscillatore dipendente dallo smorzamento). Inoltre anche lo sfasamento tra forzante ed oscillatore è più complesso anche se qualitativamente segue quanto visto per il caso non smorzato.
In figura, sempre presa da wikipedia, si può osservare come varia il comportamento partendo da smorzamento nullo fino allo smorzamento critico sia per l'ampiezza delle oscillazioni (a sinistra) sia per l'andamento dello sfasamento (a destra) che a bassa frequenza è vicino a zero, alla risonanza passa per 90° mentre, per frequenze più alte della frequenza di risonanza, si avvicina a 180°.