UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA — SCUOLA POLITECNICA

FISICA GENERALE — Sede di La Spezia — prova scritta del 9 Gennaio 2020

Mostrare i passaggi principali in modo conciso, leggibile, con i risultati numerici finali in unità del sistema internazionale (SI) ed espressi con due cifre significative. Gli elaborati che presenteranno risultati non giustificati non formalmente corretti e/o in una grafia non comprensibile non saranno corretti.

ME1

Un satellite di massa m deve essere lanciato su un'orbita geostazionaria circolare. Rispetto ad un sistema di riferimento inerziale esterno alla Terra, calcolare:

a) il raggio dell'orbita e l'accelerazione di gravità alla quota del satellite

b) il modulo del momento angolare e l'energia totale del satellite

[Dati: $m = 2000$ kg, costante gravitazione universale $G = 6.67\ 10^{-11}\ Nm^2/(kg)^2$, massa della terra $M_T = 5.97\ 10^{24}\ kg$. Suggerimento: un satellite in orbita geostazionaria ha un periodo di rivoluzione coincidente con il periodo di rotazione della Terra pari a 24 ore.]

ME2

Due corpi puntiformi m_1 e m_2 sono posti su due piani inclinati senza attrito (con inclinazioni θ_1 e θ_2) e sono uniti da una fune ideale. La fune scorre senza scivolare nella gola di una carrucola formata da un anello di massa M_a e 4 raggi uguali assimilabili a bacchette di massa m_b e lunghezza R come mostrato in figura 1. I corpi iniziano a muoversi partendo da fermi all'istante $t_0 = 0\ s$. Calcolare:

a) l'accelerazione del corpo 1.

b) la variazione di quota del corpo 1 e l'energia rotazionale della carrucola dopo un secondo dalla partenza.

[Dati: $m_1 = 2 \cdot m_2$; $m_2 = 100\ g$; $M_a = 4 \cdot m_b$ con $m_b = m_2$; $R = 2.5\ cm$; $\theta_1 = 45°$; $\theta_2 = 60°$]

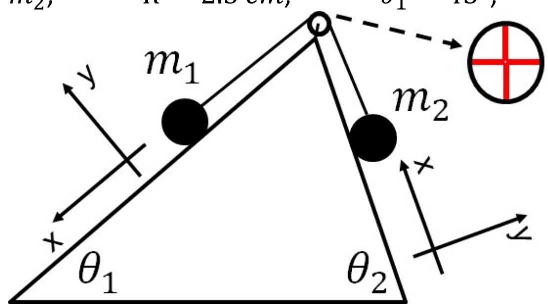


Figura 1

EM1

Si consideri un condensatore isolato a facce piane e parallele di forma quadrata di lato L poste a distanza d. Misurando il campo elettrico tra le armature si trova un valore pari a E. In ipotesi di condensatore ideale:

a) calcolare il valore della densità di carica sulle armature. Ad un certo istante le armature vengono distanziate in modo che la nuova distanza che le separa sia pari a $2d$. Si calcoli la differenza di potenziale V_b ai capi del condensatore.

b) Si calcoli il valore della resistenza R con cui si vuole cortocircuitare le armature al fine di ridurre la differenza di potenziale tra di esse al valore V_s dopo un tempo t_s.

[Dati: $L = 50\ cm$; $d = 0.1\ mm$; $E = 20\frac{kV}{cm}$; $t_s = 1\ ms$; $V_s = 10\ V$]

EM2

Si vuole controllare la posizione verticale di una massa m mediante un attuatore magnetico formato da tre fili paralleli all'asse y e giacenti nel piano yz (vedi figura 2) separati tra di loro da una distanza pari a d. Ciascun filo ha lunghezza L e massa trascurabile. Siano i_1, i_2 e i_3 le correnti che scorrono nei fili con i versi indicati in figura 2. Si calcoli:

a) il vettore campo magnetico nella posizione del terzo filo se $i_1 = i_2 = i$.

b) Il verso di i_3 e la sua intensità necessari a mantenere in equilibrio la massa m ad esso appesa.

[Dati: $L = 1\ m$; $d = 1.0\ cm$; $i = 20A$; $m = 0.3\ g$]

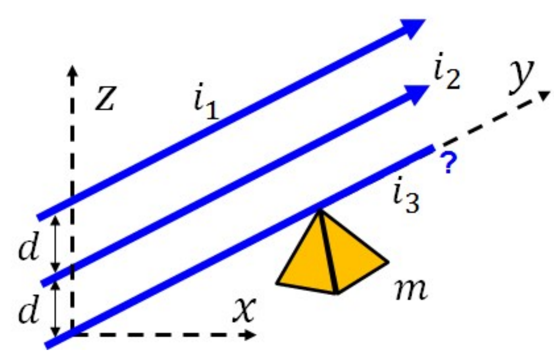


Figura 2

,

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA –SCUOLA POLITECNICA
FISICA GENERALE I - Sede di La Spezia –Prova del ??/01/2020
SOLUZIONI

I valori intermedi non saranno arrotondati, i valori finali saranno arrotondati a 2 cifre significative. Nelle soluzioni useremo $g = 9.81\ m/s^2$, G=6.673·10^{-11} $m^3/(kg·s^2)$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ F/m$ e $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}\ H/m$.

ME1

Rispetto ad un **sistema inerziale**, l'orbita del satellite è circolare con il centro sul centro della Terra e il moto è circolare uniforme, l'unica forza applicata è quella di gravità $\vec{F}_G$ in direzione centripeta.

a) Il tempo in cui la Terra compie un giro è pari a $T = 24\ h = 24 \cdot 3660\ s = 86400\ s$ da cui la
la velocità angolare $\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.2722e{-}10^{-5}\ rad/s$ e dalla conoscenza del raggio r dell'orbita $v = \omega r$.
Essendo l'orbita circolare, in direzione radiale la legge di Newton è
Rad: $-F_G = -m\frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r \rightarrow G\frac{mM_T}{r^2} = m\omega^2 r$ da cui $G\frac{M_T}{\omega^2} = r^3$
$r = \sqrt[3]{G\frac{M_T}{\omega^2}} \approx 42.233 \cdot 10^6 m \approx 42 \cdot 10^6 m.$
Poiché la forza gravitazionale in un punto a distanza r vale $G\frac{mM_T}{r^2} = mg(r)$ la forza peso definisce una accelerazione di gravità a questa distanza pari a
$g(r) = G\frac{M_T}{r^2} \approx 0.2234\frac{m}{s} \approx 0.22\ \frac{m}{s}$

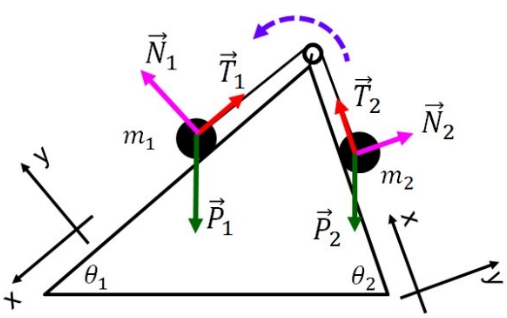
b) La velocità tangenziale del satellite vale $v = \omega r = 3.0708\ 10^3\ m/s$, da cui il modulo del momento angolare, assumendolo puntiforme:
$\ell = mvr = m\omega r^2 \approx 2.5942 \cdot 10^{14}\ Js \approx 2.6 \cdot 10^{14}\ Js$

Nota: Anche se si volesse considerare il satellite un corpo rigido (ad esempio sferico di raggio r_S) e quindi il momento angolare calcolato come $\ell = I_T\omega$, il momento d'inerzia con polo nel centro della Terra sarebbe espresso da $I_T = I_{CM} + mr^2 = \frac{2}{5}mr_S{}^2 + mr^2$.
Poiché $r_S \ll r$ (e questo vale per qualunque forma del satellite, anche non sferica) si ha $I_T \cong mr^2$ da cui $\ell = I_T\omega = mr^2\omega$ come prima.

Essendo l'energia potenziale gravitazionale $U_G = -G\frac{mM_T}{r}$, l'energia totale sarà $E = K + U_G = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_T}{r}$
Osserviamo che $E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_T}{r} = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - G\frac{mM_T}{r} = \frac{1}{2}m\,G\frac{M_T}{r^3}r^2 - G\frac{mM_T}{r}$ da cui
$E = -\frac{1}{2}G\frac{mM_T}{r} \approx -9.433 \cdot 10^9\ J \approx -9.4 \cdot 10^9\ J$

ME2

a) I corpi da analizzare sono 3 ed i diagrammi delle forze per ciascuno di essi sono:



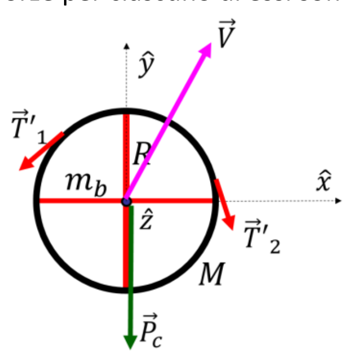


Figura 1: (a) diagramma delle forze per i due corpi; (b) e per la carrucola.

<u>Suggerimento metodologico</u>: per ipotesi $m_1 = 2 \cdot m_2$, quindi possiamo ragionevolmente supporre che durante il movimento m_1 scenda ed m_2 salga. Il segno dell'accelerazione dirà se tale assunzione è corretta o no.

Corpo 1: il moto avviene solo lungo l'asse x mentre la coordinata $y_1 = cost$ da cui, derivando, $v_{1y} = 0$ e $a_{1y} = 0$
X₁: $m_1 g \operatorname{sen}\theta_1 - T_1 = m_1 a_1$
Y₁: $N_1 - m_1 g \cos\theta_1 = 0$
Corpo 2: il moto avviene solo lungo l'asse x mentre la coordinata $y_2 = cost$ da cui $v_{2y} = 0$ e $a_{2y} = 0$
X₂: $-m_2 g \operatorname{sen}\theta_2 + T_2 = m_2 a_2$
Y₂: $N_2 - m_2 g \cos\theta_1 = 0$
Carrucola: per la carrucola definiamo in sistema di riferimento con asse x orizzontale verso destra, asse y verticale verso l'alto, asse z uscente dal foglio (vedi Figura 1-b) e quindi le rotazioni positive sono quelle antiorarie.
Sia $M = M_a + 4m_b = 8 \cdot m_2$
La prima equazione cardinale non è di utilità per il problema ma servirebbe solo a determinare la reazione vincolare $\vec{V}$ del perno per l'equilibrio della carrucola
X: $T'_1 \cos\theta_1 - T'_2 \cos\theta_2 + V_x = 0$
y: $-T'_1 \sin\theta_1 - T'_2 \sin\theta_2 + V_y - Mg = 0$
Osserviamo che alle estremità libere della fune $\vec{T}'_1 = -\vec{T}_1$ e quindi $|\vec{T}'_1| = |\vec{T}_1|$ e $\vec{T}'_2 = -\vec{T}_2$ e quindi $|\vec{T}'_1| = |\vec{T}_1|$ da cui possiamo usare solo T_1 e T_2.
La seconda equazione cardinale, prendendo come polo il perno, che è l'asse di rotazione, e quindi solo le tensioni della fune hanno momento non nullo, è espressa da:
z: $RT_1 - RT_2 = I\alpha$

con $I = M_a R^2 + 4\left(\frac{1}{3} m_b {L_b}^2\right) = M_a R^2 + 4\left(\frac{1}{3} m_b R^2\right) = \left(M_a + \frac{4}{3} m_b\right) R^2 = \left(4 \cdot m_2 + \frac{4}{3} m_2\right) R^2 = \frac{16}{3} m_2 R^2$

Finora i corpi nelle varie equazioni sono tra loro indipendenti.
Consideriamo il vincolo dato dalla fune: uno spostamento del corpo 1 verso il basso farà ruotare la carrucola in senso positivo (antiorario) e salire il corpo 2
$+\Delta x_1 = R(+\Delta\theta) = +\Delta x_2$, derivando $v_1 = R\omega = v_2$ e derivando una seconda volta si ottiene $a_1 = R\alpha = a_2$ e definendo una unica accelerazione $a = a_1 = R\alpha = a_2$.
Utilizzando α come variabile

X₁: $m_1 g \operatorname{sen}\theta_1 - T_1 = m_1 R\alpha \rightarrow T_1 = m_1 g \operatorname{sen}\theta_1 - m_1 R\alpha$
X₂: $-m_2 g \operatorname{sen}\theta_2 + T_2 = m_2 R\alpha \rightarrow T_2 = m_2 g \operatorname{sen}\theta_2 + m_2 R\alpha$
z꜀: $R(m_1 g \operatorname{sen}\theta_1 - m_1 R\alpha) - R(m_2 g \operatorname{sen}\theta_2 + m_2 R\alpha) = I\alpha \rightarrow R(m_1 g \operatorname{sen}\theta_1 - m_2 g \operatorname{sen}\theta_2) = (m_1 R^2 + m_2 R^2 + I)\alpha$

$\rightarrow \alpha = \frac{R(m_1 g \operatorname{sen}\theta_1 - m_2 g \operatorname{sen}\theta_2)}{m_1 R^2 + m_2 R^2 + I} = \frac{R(2m_2 g \operatorname{sen}\theta_1 - m_2 g \operatorname{sen}\theta_2)}{2m_2 R^2 + m_2 R^2 + \frac{16}{3} m_2 R^2} = \frac{m_2 g(2\operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2)}{m_2 R \cdot \left(2 + 1 + \frac{16}{3}\right)} = \frac{3g(2\operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2)}{25R\cdot}$
da cui $a_1 = a = R\alpha = R\frac{3g(2\operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2)}{25R\cdot} = \frac{3g(2\operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2)}{25} \approx 0.645106 \frac{m}{s^2} \approx 0.65 \frac{m}{s^2}$
L'accelerazione è positiva ovvero il corpo m_1 scivola verso il basso mentre il corpo m_2 sale verso l'alto.

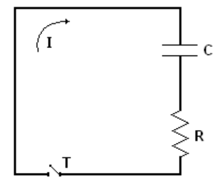
b)
Dopo un tempo t dall'inizio del moto il corpo 1 avrà una velocità $v_1 = \int a dt = at$ e avrà effettuato uno spostamento lungo il piano inclinato $s_1 = \int v_1 \, dt = \int at \, dt = \frac{1}{2}at^2$ con conseguente variazione di quota
$h = s_1 \sin\theta_1 = \frac{1}{2}at^2 \cdot \sin\theta_1 \approx 0.22808\, m \approx 0.23\, m$,
l'energia cinetica rotazione della carrucola
$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{v_1}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3}m_2 R^2\left(\frac{at}{R}\right)^2 = \frac{8}{3}m_2(at)^2 \approx 0.11098\, J \approx 0.11\, J$

EM1
a)

La capacità di un condensatore a facce piane e parallele vale $C_a = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$. Inoltre la carica Q è legata alla differenza di potenziale V_a tra le armature come $Q = C_a V_a$ ed essendo il campo elettrico tra le armature uniforme
$V_a = E\ d \rightarrow Q = \varepsilon_0 \frac{A}{d}\ E\ d = \varepsilon_0 A\ E$ da cui $\sigma = \frac{Q}{A} = \varepsilon_0\ E \approx 1.77083 \cdot 10^{-5} \frac{C}{m^2} = 1.8 \cdot 10^{-5} \frac{C}{m^2}$.

Poiché il condensatore è isolato, la carica non cambia durante l'allontanamento delle armature (principio di conservazione della carica) e quindi anche la densità di carica non cambia rispetto alla condizione iniziale. Ciò posto, è possibile risolvere il quesito in due modi:
i) σ costante implica che anche il campo elettrico $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ rimane invariato. Essendo la differenza di potenziale l'integrale tra le armature del campo elettrico, si ottiene $V_b = E\ (2d) = 2\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = 2\frac{\varepsilon_0\ E}{\varepsilon_0} d = 2Ed = 400\ V$.
ii) quando le armature vengono allontanate il valore della capacità del condensatore cambia con Q costante:
$C_b = \varepsilon_0 \frac{A}{2d} = 1.10677 \cdot 10^{-8}\ F$ da cui $V_b = \frac{Q}{C_b} = \frac{Q\ (2d)}{\varepsilon_0 A}$ che fornisce lo stesso risultato trovato prima.

b)



La scarica di un condensatore può essere risolta utilizzando la legge di Kirchhoff alla singola maglia che contiene il condensatore e la resistenza e questo fornisce l'equazione differenziale $\frac{q(t)}{C_b} - Ri(t) = 0$, inoltre il legame tra la carica che diminuisce sulle armature ($\frac{dq}{dt} < 0$) e la corrente uscente dal condensatore è $i = -\frac{dq}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{q(t)}{C_b} + R\frac{dq}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC_b}dt \quad \rightarrow$

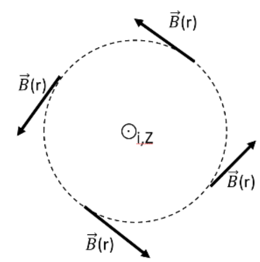
$$\int_{q_i}^{q_f} \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{1}{RC_b}dt' \quad \rightarrow \quad \ln\frac{q_f}{q_i} = -\frac{t}{RC_b} \quad \rightarrow \quad \frac{q_f}{q_i} = e^{-\frac{t}{RC_b}} \quad \rightarrow \quad q_f(t) = q_i e^{-\frac{t}{RC_b}} \text{ con } q_i = Q$$

che divisa per la capacità fornisce $V(t) = \frac{Q}{C_b}\ e^{-\frac{t}{RC_b}} = V_b\ e^{-\frac{t}{RC_b}}$. Per $t = t_s$ si ha $V(t = t_s) = V_s = V_b\ e^{-\frac{t_s}{RC_b}}$

$$\rightarrow \quad \frac{V_s}{V_b} = e^{-\frac{t_s}{RC_b}} \quad \rightarrow \quad \log\frac{V_s}{V_b} = -\frac{t_s}{RC_b} \quad \rightarrow R = \frac{t_s}{C_b \log\frac{V_b}{V_s}} \approx 24.493348 \cdot 10^3\ \Omega \approx 25 \cdot k\Omega$$

EM2

a)



Come premessa, ricordiamo che Il campo generato da un filo percorso da una corrente i uscente dal foglio (lungo +z) è quello mostrato in figura ovvero tangente alla linea di forza centrata sul filo e con rotazione dettata dalla regola della mano destra e modulo $B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$.

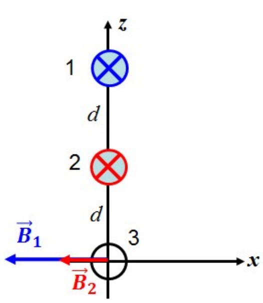
Nel piano xy ortogonale ai cavi considerati, i campi da essi generati nel punto P risultano uguali a:

$$\vec{B}_1(0, y, 0) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right) \text{ T} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\vec{B}_2(0, y, 0) = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d}(-1, 0, 0) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}(-1, 0, 0) \text{ T} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\vec{B}_{tot}(0, y, 0) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}\left(-\frac{3}{2}, 0, 0\right) = \frac{3\mu_0 i}{4\pi d}(-1, 0, 0) \text{ T} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Come mostrato nella figura sottostante



Il modulo del campo totale risulterà $\left|\vec{B}_{TOT}(0, y, 0)\right| = \frac{3\mu_0 i}{4\pi d} \approx 6.0 \cdot 10^{-4}\ T$

b)

Supponiamo che la direzione della corrente i_3 sia concorde a i_1 e i_2 ovvero che $\vec{u}_{l3} = (0, \quad 1, \quad 0)$

Allora, la forza agente sul cavo 3 di lunghezza L vale:

$$\vec{\mathrm{F}} = i_3 L \vec{u}_{l3} \times \vec{B}_{TOT}(0, y, 0) = \frac{3\mu_0 i}{4\pi d} L i_3 \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{3\mu_0 i i_3 L}{4\pi d}(0, \quad 0, \quad 1) = \frac{3\mu_0 i i_3 L}{4\pi d} \cdot \hat{u}_z$$

L'equazione di Newton applicata alla massa m appesa al cavo 3 che deve essere in equilibrio vale: $\vec{\mathrm{F}} + \vec{P} = 0$

Sostituendo si ha $\quad \frac{3\mu_0 i i_3 L}{4\pi d} \cdot \hat{u}_z - mg \cdot \hat{u}_z = 0$

Da qui si nota che se la direzione della corrente i_3 fosse opposta rispetto a quella assunta non esisterebbe alcun valore della corrente i_3 in grado di far levitare il cavo 3 perché $\vec{\mathrm{F}}$ sarebbe concorde con $mg \cdot \hat{u}_z$.

La corrente $i_3$vale:

$i_3 = \frac{4\pi d m g}{3\mu_0 i L} \approx 4.903325\ \mathrm{A} \approx 4.9\ A$