

Prova scritta del 17 Giugno 2020 in "regime di Covid-19"

Mostrare i passaggi principali in modo conciso, leggibile, con i risultati numerici finali in unità del sistema internazionale (SI) ed espressi con due cifre significative. Gli elaborati che presenteranno risultati non giustificati non formalmente corretti e/o in una grafia non comprensibile non saranno corretti.

ME1-2

Una pallina di plastica di massa m e dimensioni trascurabili lasciata ferma alla distanza l dal bordo di un tavolo cade da quest'ultimo perché è inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale, con il bordo a distanza h dal pavimento orizzontale. La pallina urta il pavimento rimanendo a contatto per un tempo Δt e perdendo il 30% dell'energia cinetica prima dell'impatto. Essendo la forza impulsiva dell'urto verticale si conserva la componente orizzontale della quantità di moto. Calcolare

a) Immediatamente prima dell'urto, l'energia cinetica e l'angolo (rispetto all'orizzontale) con cui impatta la pallina.

b) La forza media a cui è sottoposta la pallina e, immediatamente dopo l'urto, l'angolo (rispetto all'orizzontale) con cui la pallina lascia il pavimento.

[Dati: $m = 10 \text{ g}$; $\theta = 5^\circ$, $h = 60 \text{ cm}$; $l = 10 \text{ cm}$; $\Delta t = 1 \text{ ms}$].

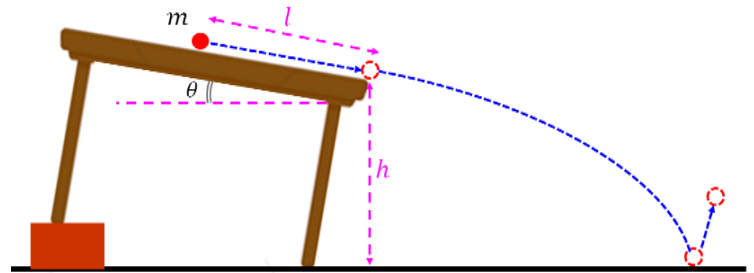


Figura 1

EM1

Si consideri un filo rettilineo indefinito uniformemente carico con densità lineare di carica λ . Ad una distanza d dal filo è posta una carica puntiforme q (vedi figura 2). Si calcoli la forza che la carica q esercita sul filo carico.

[Dati: $d = 15 \text{ cm}$; $\lambda = 5.0 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}$,
 $q = 3.0 \cdot 10^{-8} \text{ C}$].

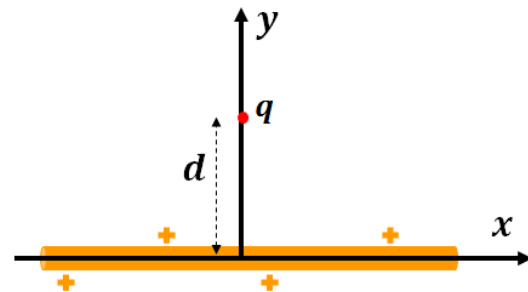


Figura 2

EM2

Una bobina quadrata di lato ℓ , N spire e massa totale M è percorsa dalla corrente i . Essa è vincolata in modo da poter ruotare senza attrito attorno all'asse y (vedi figura 3). Quando la spira è sottoposta al campo magnetico $\vec{B} = B_0 \hat{u}_z$ il sistema si trova in equilibrio statico quando il piano della bobina forma un angolo θ con l'asse z . Calcolare la massa della bobina.

[Dati: $i = 1.0 \text{ A}$; $B_0 = 0.7 \text{ T}$; $N = 12$; $\theta = \frac{\pi}{6}$;
 $\ell = 5.0 \text{ cm}$]

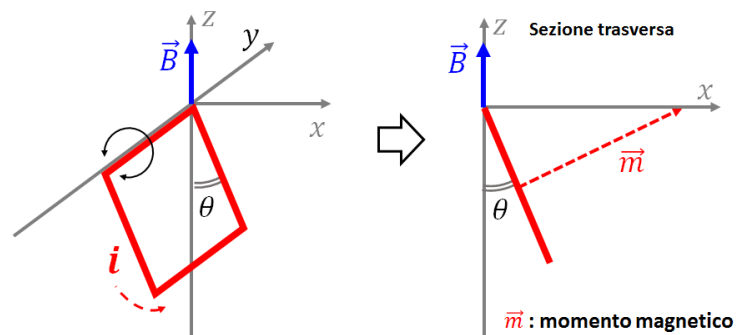


Figura 3

Costanti utili: $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$ e $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Tm}}{\text{A}}$.

SOLUZIONI

I valori intermedi non saranno arrotondati, i valori finali saranno arrotondati a 2 cifre significative. Nelle soluzioni useremo $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $G=6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$, $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ e $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$.

ME1

La pallina si trova su un piano inclinato lungo $l = 10 \text{ cm}$, dalla conservazione dell'energia $E_i = E_f$ assumendo lo zero dell'energia potenziale alla quota del bordo, si ottiene $E_i = mg\Delta h = mgl \sin \theta$ e $E_f = \frac{1}{2}mv_1^2$.

Da cui si ricava $v_1 = \sqrt{2gl \sin \theta} = 0.4135 \text{ m/s}$.

La pallina abbandona il tavolo con una velocità v_1 , utilizzando un sistema di riferimento con asse x orizzontale e y verticale le componenti sono $\vec{v}_1 = v_1(\cos \theta, -\sin \theta)$, con questa velocità inizia il moto del proiettile con accelerazione verticale $\vec{g} = (0, -g)$. Le equazioni del moto saranno perciò:

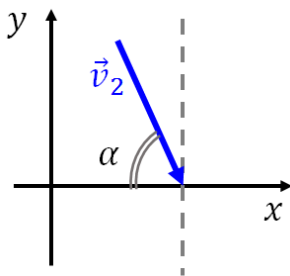
$$\begin{cases} a_x = 0 \rightarrow v_x = v_1 \cos \theta = \text{cost} \rightarrow x = \int v_x dt = v_1 \cos \theta t \\ a_y = -g \rightarrow v_y = -\int g dt + v_{1y} = -gt - v_1 \sin \theta \rightarrow y = \int v_y dt + h = -\frac{1}{2}gt^2 - v_1 \sin \theta t + h \end{cases}$$

assumendo l'origine degli assi sul pavimento al piede della proiezione verticale del bordo del tavolo (ovviamente sono possibili altre scelte che modificheranno la posizione iniziale del moto di caduta). Il tempo di caduta t_c può essere valutato annullando y (ovvero la pallina tocca il pavimento):

$$-\frac{1}{2}gt_c^2 - v_1 \sin \theta t_c + h = 0 \quad \rightarrow \quad t_c = \frac{-v_1 \sin \theta \pm \sqrt{(v_1 \sin \theta)^2 + 2gh}}{g} = \frac{v_1}{g} \sin \theta \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gh}{(v_1 \sin \theta)^2}} \right]$$

scegliendo la soluzione positiva si ha:

$$t_c = \frac{v_1}{g} \sin \theta \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{(v_1 \sin \theta)^2}} \right] = 0.0346153 \text{ s} \approx 0.035 \text{ s}$$



Alternativamente si può ricavare l'ascissa del punto di impatto e conseguentemente ricavare l'istante corrispondente t_c . Da cui la velocità prima dell'urto vale:

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= (v_1 \cos \theta, -gt_c - v_1 \sin \theta) = \left(v_1 \cos \theta, -g \frac{-v_1 \sin \theta + \sqrt{(v_1 \sin \theta)^2 + 2gh}}{g} - v_1 \sin \theta \right) = \\ \vec{v}_2 &= (v_1 \cos \theta, v_1 \sin \theta - \sqrt{(v_1 \sin \theta)^2 + 2gh} - v_1 \sin \theta) = (v_1 \cos \theta, -\sqrt{(v_1 \sin \theta)^2 + 2gh}) \\ \vec{v}_2 &\approx (+0.41192, -3.43064) \text{ m/s} \approx (+0.41, -3.4) \text{ m/s} \\ \tan \alpha &= \frac{-gt_c - v_1 \sin \theta}{v_1 \cos \theta} \text{ da cui si ricava } \alpha = \text{arctan} \left| \frac{-gt_c - v_1 \sin \theta}{v_1 \cos \theta} \right| \approx 83.154^\circ \approx 83^\circ \end{aligned}$$

$$\text{L'energia } E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \approx 0.0596946 \text{ J} \approx 60 \text{ mJ}$$

Osservazione: l'energia poteva anche essere calcolata immediatamente dalla conservazione dell'energia perché la pallina parte da un'altezza $h + l \sin \theta$.

b)

Non essendoci forze in orizzontale, si conserva la quantità di moto orizzontale da cui $v_{2x} = v_1 \cos \theta = v_{3x}$ mentre quella verticale è modificata dalla forza normale del pavimento e la pallina perde 30% dell'energia da cui l'energia dopo l'urto vale:

$$E_3 = 0.7 E_2 = \frac{1}{2} m (v_{3x}^2 + v_{3y}^2) \text{ da cui } v_{3y} = \sqrt{\frac{2E_3 - mv_{3x}^2}{m}} = 2.8613986 \frac{m}{s} \approx 2.9 \frac{m}{s}.$$

L'angolo di rimbalzo: $\tan \beta = \frac{v_{3y}}{v_{3x}}$ da cui si ottiene $\beta = \arctan g \left(\frac{v_{3y}}{v_{3x}} \right) = 81.808961^\circ \approx 82^\circ$.

Applicando il teorema dell'impulso $\Delta p_y = F_m \Delta t$ da cui si ottiene

$$\Delta p_y = m(v_{3y} - v_{2y}) = m(v_{3y} + gt_c + v_1 \sin \theta) = 0.06292 \frac{kg \cdot m}{s} \approx 0.063 \frac{kg \cdot m}{s} \dots$$

quindi la forza media F_M vale: $F_M = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} \approx 0.18177 N \approx 0.18 N$

EM1

1)

Strategia: è estremamente complicato il calcolo diretto della forza che la carica esercita sul filo carico. Tuttavia, per il terzo principio della meccanica tale forza è uguale e contraria alla forza che il filo carico esercita sulla carica puntiforme. A tal fine calcoliamo il campo elettrico prodotto dal filo carico nel punto dove è situata la carica q .

Applichiamo il teorema di Gauss ad una superficie gaussiana Σ , costituita da un cilindro concentrico al filo e di raggio uguale a d :

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon_0}$$
$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{Base_inf} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} + \int_{Base_sup} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} + \int_{Lat.} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{Lat.} E d\Sigma = E \int_{Lat.} d\Sigma = 2\pi d L E = \frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

Osservando che:

(i) i due integrali sulle superfici di base non danno contributo (il campo elettrico è ortogonale al vettore normale alla superficie);

(ii) l'integrale sulla superficie laterale: il campo elettrico è parallelo e concorde con il versore normale alla superficie quindi il prodotto scalare vale $E d\Sigma$. Inoltre, visto che la distribuzione di carica è uniforme, il modulo di E è costante a distanza fissata dal filo carico. Quindi l'integrale esteso alla superficie laterale vale $2\pi d L E$.

$$2\pi d E = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi d} \quad \text{pertanto } \vec{F}_{filo \rightarrow q} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{u}_y$$

la forza che la carica esercita sul filo vale: $\vec{F}_{q \rightarrow filo} = -\vec{F}_{filo \rightarrow q} = -\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{u}_y$

$$|\vec{F}_{q \rightarrow filo}| = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \approx 1.7975 \cdot 10^{-4} N \approx 1.8 \cdot 10^{-4} N$$

EM2

Affinché la spira sia in equilibrio statico (non ruoti) si deve verificare che:

$$\sum_i \vec{\tau}_i^{est} = 0$$

polo: un qualsiasi punto posto sull'asse di rotazione (asse y).

Nel caso in esame sulla spira agiscono solo i momenti dovuti alla forza peso ed alla forza magnetica:

$$\vec{\tau}_p + \vec{\tau}_{fm} = 0$$

Calcoliamo i momenti dovuti rispettivamente alla forza magnetica ed alla forza peso.

Vista la geometria del sistema, il momento magnetico della bobina vale:

$$\vec{m} = Ni\ell^2(\cos\theta \cdot \hat{u}_x + \sin\theta \cdot \hat{u}_z)$$

Il momento torcente agente sulla spira e dovuto al campo magnetico vale:

$$\vec{\tau}_{fm} = \vec{m} \times \vec{B} = Ni\ell^2(\cos\theta \cdot \hat{u}_x + \sin\theta \cdot \hat{u}_z) \times (B_0 \cdot \hat{u}_z) = Ni\ell^2 \cos\theta B_0(\hat{u}_x \times \hat{u}_z) = Ni\ell^2 \cos\theta B_0(-\hat{u}_y)$$

NB: il momento della forza magnetica è originato dal "momento di una coppia" di forze uguali ed opposte. Il momento di una coppia è indipendente dalla scelta del polo.

Il momento torcente dovuto alla forza peso rispetto al polo fissato (vedi sopra) vale: $\vec{\tau}_p = +\frac{\ell}{2}Mg \sin\theta \hat{u}_y$

Pertanto, la seconda equazione cardinale della dinamica per il sistema considerato vale:

$$Ni\ell^2 \cos\theta B_0(-\hat{u}_y) + \frac{\ell}{2}Mg \sin\theta \hat{u}_y = 0 \text{ la cui proiezione ortogonale sull'asse } y \text{ è ovvia:}$$

$$-Ni\ell^2 \cos\theta B_0 + \frac{\ell}{2}Mg \sin\theta = 0 \quad \text{da cui} \quad M = 2 \frac{Ni\ell^2 \cos\theta B_0}{\ell g \sin\theta} = 2 \frac{Ni\ell B_0}{g \operatorname{tg}\theta} \approx 0.14836 \text{ kg} \approx 0.15 \text{ kg}$$