

**Prova scritta del 9 Settembre 2020 in "regime di Covid-19"**

Mostrare i passaggi principali in modo conciso, leggibile, con i risultati numerici finali in unità del sistema internazionale (SI) ed espressi con due cifre significative. Gli elaborati che presenteranno risultati non giustificati non formalmente corretti e/o in una grafia non comprensibile non saranno corretti.

**ME1**

Un corpo puntiforme di massa  $m$  inizia a muoversi al tempo  $t = 0$  seguendo una traiettoria curva nel piano orizzontale  $xy$ . Il raggio vettore all'istante generico  $t$  è dato da:  
 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\alpha t^3 - \beta t^2, \gamma \cdot \text{sen}(\omega t) + \delta)$   
 espresso in metri.

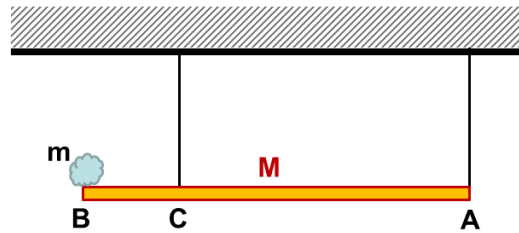
Si calcoli il modulo della forza ed il momento torcente applicati al corpo puntiforme rispetto all'origine degli assi all'istante  $t^*$ .

[Dati:  $m = 100 \text{ g}$ ;  $\alpha = 2 \text{ m/s}^3$ ;  $\beta = 2 \text{ m/s}^2$ ;  $\gamma = 2 \text{ m}$ ;  $\delta = 1 \text{ m}$ ;  $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$ ;  $t^* = 2 \text{ s}$ ].

**ME2**

Un'asta omogenea AB di massa  $M$  e lunghezza  $L$  è sospesa tramite delle funi ideali al soffitto in modo che sia orizzontale. Le funi sono attaccate nei punti A e C a distanza  $d = \frac{3}{4}L$  da A (Figura 1). Si calcoli il valore delle tensioni dei fili in condizioni di equilibrio statico.

[Dati:  $M = 5.0 \text{ kg}$ ;  $m = M/2$ ].

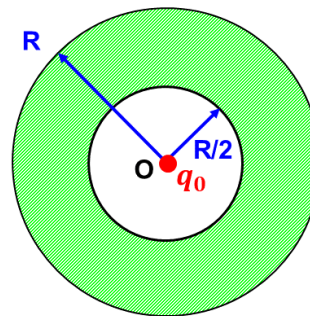


**Figura 1**

**EM1**

Si consideri un guscio metallico sferico inizialmente scarico, di raggio esterno  $R$  e raggio interno  $R/2$  (vedi Fig.2). Si supponga ora di inserire al centro della cavità del guscio una carica puntiforme  $q_0$  e, successivamente, di trasferire sul guscio metallico un'ulteriore carica  $Q_{ex}$ . Si calcoli la densità di carica superficiale sulla superficie interna ed esterna del guscio conduttore quando il sistema è di nuovo in condizioni di equilibrio elettrostatico.

[Dati:  $R=1.3 \text{ cm}$ ;  $q_0 = 1.5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$   $Q_{ex} = -3.5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  ]



**Figura 2**

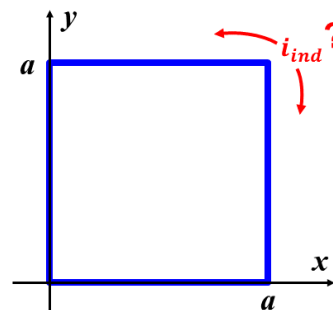
**EM2**

Una spira quadrata di lato  $a$  (Fig. 3) e resistenza  $R_S$  è sottoposta all'azione del campo magnetico seguente:

$$\vec{B} = B_0 \cdot \hat{u}_x - B_0 \left(\frac{t}{t_0}\right) \cdot \hat{u}_y + B_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \cdot \hat{u}_z.$$

Si calcoli l'intensità ed il verso della corrente indotta nella spira.

[Dati:  $a=5.5 \text{ cm}$ ;  $B_0 = 2.5 \text{ T}$ ;  $R_S = 1.5 \Omega$ ;  $t_0 = 45 \text{ s}$ ]



**Figura 3**

**Costanti utili:**  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$  e  $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Tm}}{\text{A}}$ .

SOLUZIONI

I valori intermedi non saranno arrotondati, i valori finali saranno arrotondati a 2 cifre significative. Nelle soluzioni useremo  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $G=6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ ,  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$  e  $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$ .

ME1

Per ipotesi il raggio vettore all'istante generico  $t$  è dato da:

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\alpha t^3 - \beta t^2, \gamma \cdot \text{sen}(\omega t) + \delta) \text{ m}$ . Pertanto, si avrà:

- la velocità all'istante  $t$ :  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (3\alpha t^2 - 2\beta t, \omega\gamma \cdot \text{cos}(\omega t))$
- l'accelerazione all'istante  $t$ :  $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (6\alpha t - 2\beta, -\omega^2\gamma \cdot \text{sen}(\omega t))$

La forza agente sulla massa  $m$  all'istante  $t$  vale:  $\vec{F}(t) = m\vec{a}(t) = m(6\alpha t - 2\beta, -\omega^2\gamma \cdot \text{sen}(\omega t))$  il cui modulo vale:

$|\vec{F}(t)| = m\sqrt{(6\alpha t - 2\beta)^2 + (-\omega^2\gamma \text{sen}(\omega t))^2}$  che calcolato all'istante  $t^*$  risulta:

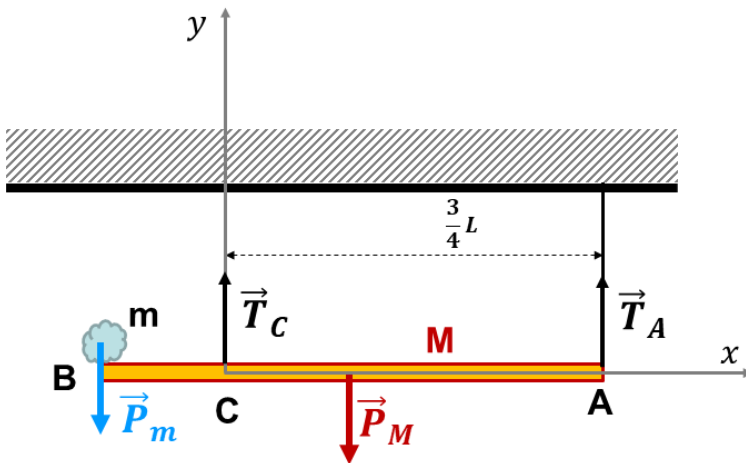
$$|\vec{F}(t^*)| = m\sqrt{(6\alpha t^* - 2\beta)^2 + (-\omega^2\gamma \text{sen}(\omega t^*))^2} = 2.0 \text{ N}$$

Fissato il polo nell'origine, il momento torcente vale:  $\vec{\tau}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r_x F_y - r_y F_x)$

$\vec{\tau}(t) = (0, 0, (\alpha t^3 - \beta t^2)m(-\omega^2\gamma \cdot \text{sen}(\omega t)) - (\gamma \cdot \text{sen}(\omega t) + \delta)m(6\alpha t - 2\beta))$  che calcolato in  $t^*$  vale:

$\vec{\tau}(t^*) = (0, 0, -2.0) \text{ Nm}$  pertanto si ha  $|\vec{\tau}(t)| = 2.0 \text{ Nm}$

ME2



L'asta è sottoposta alla forza peso applicata al CM posizionato al centro dell'asta omogenea, alle tensioni delle due funi ed alla forza peso applicata alla massa  $m$ . Scegliamo l'asse  $x$  orizzontale, l'asse  $y$  verticale e l'asse  $z$  uscente dal foglio con l'origine coincidente col punto C. Per l'equilibrio devono essere soddisfatte le 2 equazioni cardinali della dinamica.

Prima equazione cardinale:

$$\begin{aligned} x: & \quad 0 = 0 \\ y: & \quad T_A + T_C - Mg - mg = 0 \end{aligned}$$

Seconda equazione cardinale scritta assumendo C come polo:

$$z: -\left(\frac{L}{4}\right)Mg + \left(\frac{L}{4}\right)mg + \left(\frac{3}{4}L\right)T_A = 0 \rightarrow -\frac{L}{4}(M-m)g + \frac{3}{4}LT_A = 0 \rightarrow$$

$$T_A = \frac{Mg}{6} = 8.175 \text{ N} \approx 8.2 \text{ N}$$

Pertanto si ha :  $T_C = (M + m)g - T_A = \frac{3Mg}{2} - \frac{Mg}{6} = \frac{4Mg}{3} \approx 65.4 \text{ N} \approx 65 \text{ N}$

### EM1

Il guscio metallico è inizialmente scarico.

Inseriamo la carica  $q_0$  nel centro della cavità. Per effetto dell'induzione elettrostatica la presenza della carica  $q_0$  provoca una separazione di carica nel guscio metallico inizialmente neutro a causa della quale sulla superficie **interna** del guscio si affaccia una carica  $Q_{R/2} = -q_0$  mentre sulla parete **esterna** del guscio si accumula una carica  $Q_R = +q_0$ .

Per giustificare questo assunto si applichi il teorema di Gauss  $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon_0}$  ad una superficie gaussiana  $\Sigma$  di raggio  $R/2 < r < R$ . Essendo la superficie  $\Sigma$  dentro il guscio conduttore in equilibrio elettrostatico ne deriva che  $E = 0$  e quindi la carica complessiva contenuta in  $\Sigma$  deve essere nulla ovvero  $Q_{R/2} + q_0 = 0$  da cui deriva  $Q_{R/2} = -q_0$ .

Allo stesso tempo, una carica  $Q_R = +q_0$  derivante dalla separazione di carica indotta nel guscio dalla carica puntiforme  $q_0$  si accumula sulla superficie esterna del conduttore. Considerando una superficie gaussiana  $\Sigma$  questa volta di raggio  $r > R$ , la carica complessiva in essa contenuta vale  $Q_{\Sigma} = +q_0 - q_0 + q_0 = +q_0$ , ovvero il guscio conduttore non contribuisce essendo inizialmente neutro per ipotesi. Pertanto, sulla superficie esterna del guscio si dispone una carica complessiva che vale:  $Q_R = +q_0$ .

Successivamente si suppone di caricare il guscio con un eccesso di carica  $Q_{ex}$  che si distribuirà **solo** sulla superficie esterna del guscio stesso. In tal caso, la carica totale affacciata sulla superficie esterna diventa:

$$Q_R = Q_{ex} + Q_R = Q_{ex} + q_0 \approx -2.0 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Pertanto, le densità superficiale di carica affacciate rispettivamente sulla superficie interna ed esterna del guscio metallico all'equilibrio valgono:

$$\sigma_{R/2} = \frac{Q_{R/2}}{4\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{-q_0}{4\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2} = -\frac{q_0}{\pi R^2} \approx -2.8252 \cdot 10^{-5} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \approx -2.8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$\sigma_R = \frac{Q_{ex} + Q_R}{4\pi R^2} \approx -9.41752 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \approx -9.4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

### EM2

Definiamo la normale alla superficie della spira parallela e concorde all'asse  $z$ , pertanto il flusso concatenato alla spira vale:

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{\text{Area spira}} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_{\text{Area spira}} \left[ B_0 \cdot \hat{u}_x - B_0 \left(\frac{t}{t_0}\right) \cdot \hat{u}_y + B_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \cdot \hat{u}_z \right] \cdot (d\Sigma \hat{u}_z)$$

$\Phi(\vec{B}) = \int_{\text{Area spira}} \left[ B_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \right] d\Sigma$  poiché solo la componente di  $B$  parallela all'asse  $z$  dà un contributo non nullo essendo  $\hat{u}_z \cdot \hat{u}_z = 1$ .

$\Phi(\vec{B}) = B_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \int_{\text{Area spira}} d\Sigma = B_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) a^2$ . Tale flusso diminuisce nel tempo ( $t < t_0$ ).

$$\epsilon_{ind} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = +B_0 \frac{a^2}{t_0}$$

Pertanto  $i_{ind} = \frac{\epsilon_{ind}}{R_S} = \frac{a^2 B_0}{t_0 R_S} \approx 1.1204 \cdot 10^{-4} \text{ A} \approx 0.11 \text{ mA}$

Poiché il flusso concatenato con la spira diminuisce nel tempo, per la legge di Lenz la corrente indotta deve circolare in senso antiorario generando un campo indotto parallelo e concorde con la componente lungo l'asse  $z$  di quello inducente. Questo permette di controbilanciare la riduzione nel tempo del flusso concatenato.